

Kombinatorický myš-maš

Jozef Rajník, Prípravné sústredenie pred IMO MEMO, 22. 6. 2022

Úlohy, ktoré by ste mali poznať

Ak ich nepoznáte, odporúčam si ich v rýchlosti vyriešiť. Teda ak neviete ako, pozrite si hinty. Tie odporúčam pozrieť aj tak, obsahujú pár užitočných slov.

Úloha 1. Koľko najviac jazdcov (koňov) možno umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 2. Dokážte, že každá postupnosť $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozostávajúca z n celých čísel obsahuje súvislú podpostupnosť (teda $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$ pre $i \leq j$) so súčtom prvkov deliteľným n .

Úloha 3 (61MO-B-I-5). V istom meste majú vybudovanú sieť na šírenie klebiet, v ktorej si každý klebetník vymieňa informácie s tromi klebetnicami a každá klebetnica si vymieňa informácie s tromi klebetníkmi. Inak sa klebety nešíria.

- a) Dokážte, že klebetníkov a klebetníc je rovnako veľa.
- b) Predpokladajme, že sieť na šírenie klebiet je súvislá (klebety od ľubovoľného klebetníka a ľubovoľnej klebetnice sa môžu dostať ku všetkým ostatným). Dokážte, že aj keď sa jeden klebetník z mesta odsťahuje, zostane sieť súvislá.

Úlohy z MEMO a IMO

Úloha 4 (MEMO 2014 I2). Daný je pravidelný n -uholník, ktorý rozrežeme na $n - 2$ trojuholníkov pomocou $n - 3$ rezov pozdĺž uhlopriečok, ktoré sa navzájom nepretínajú vo vnútri n -uholníka. Nech *dvojfarebná triangulácia* je také rozrezanie n -uholníka, v ktorom každý trojuholník je ofarbený čiernou alebo bielou farbou a každé dva trojuholníky so spoločnou stranou majú rôzne farby. Celé číslo $n \geq 4$ nazývame *triangulárne*, ak pre pravidelný n -uholník existuje dvojfarebná triangulácia taká, že pre každý vrchol A daného n -uholníka je počet čiernych trojuholníkov s vrcholom A väčší ako počet bielych trojuholníkov s vrcholom A . Nájdite všetky triangulárne čísla.

Úloha 5 (MEMO 2015 T4). Nech N je kladné celé číslo. V každom z N^2 štvorcíkov tabuľky $N \times N$ je nakreslená jedna uhlopriečka. Nakreslené uhlopriečky rozdelia tabuľku $N \times N$ na K oblastí. Pre každé N určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu K .

Úloha 6 (IMO SL 2018 C1). Nech $n \geq 3$ je celé číslo. Dokážte, že existuje množina S pozostávajúca z $2n$ kladných celých čísel, pre ktorú platí: Pre každé $m = 2, 3, \dots, n$ množina S môže byť rozložená na dve pomnožiny s rovnakým súčtom prvkov, z ktorých jedna obsahuje práve m prvkov.

Úloha 7 (IMO 1985, úloha 4). Máme daných 1985 kladných celých čísel takých, že žiadne z nich nemá prvočíselného deliteľa väčšieho ako 23. Dokážte, že medzi nimi existujú 4 čísla, ktorých súčin je štvrtou mocninou celého čísla.

Úloha 8 (IMO SL 2018 C2). Queenie a Horst hrajú hru na šachovnici rozmerov 20×20 . Na začiatku je šachovnica prázdna. Každé kolo Horst položí jazdca na prázdne políčko, ktoré nie je ohrozované inými jazdcami (dámami ohrozené byť môže). Potom Queenie položí kráľovnú na prázdne políčko. Hra končí, akonáhle niektorý z hráčov nemá spraviť aký ťah.

Nájdite najväčšie možné číslo K také, že bez ohľadu na stratégiu Queenie, Horst vie na šachovnicu uložiť aspoň K jazdcov.

Úloha 9 (IMO 2016 U2 (C4)). Nájdite všetky kladné celé čísla n , pre ktoré je možné vyplniť políčka tabuľky $n \times n$ tak, aby:

- v každom políčku bolo práve jedno z I, M, O ;
- v každej riadku a v každom stĺpci sa písmená I, M, O nachádzali rovnaký počet krát;
- v každej diagonále, ktorej počet políčok je deliteľný tromi, sa písmená I, M, O nachádzali rovnaký počet krát.

Ďalšie úlohy

Tu je výber ďalších úloh, niektoré sú na príbuzné tématiky, niektoré až tak nie. Taktiež sú rôzne obtiažne.

Úloha 10 (PraSe 2000/01, 3. séria, úloha 4). Šachista Dominik sa chystá na dôležitý turnaj. Na tréning má 76 dní a každý deň chce zahrať aspoň jednu partiu, celkom však nie viac než 132. Dokážte, že v niekoľkých po sebe idúcich dňoch, odohral presne 21 partii.

Úloha 11 (65MO-A-III-3). Medzi obyvateľmi istého mesta sú populárne matematické kluby. Každé dva z nich majú aspoň jedného spoločného člena. Dokážte, že môžeme obyvateľom mesta rozdať kružidlá a pravítka tak, že iba jeden obyvateľ dostane oboje, a pritom každý klub bude mať pri plnej účasti svojich členov k dispozícii ako pravítko, tak kružidlo.

Úloha 12 (KMS 2017/18-L3-10). V hlavnom meste kolónie dokončujú námestie. Plochu $(2^n + 1) \times (2^n + 1)$ chcú vydláždiť bielymi a čiernymi dlaždicami rozmeru 1×1 . Dlážditiť musia tak, aby z čiernych dlaždíc nevznikol uzavretý hadík. V závislosti od kladného celého čísla n určte, koľko najviac čiernych dlaždíc môžu použiť?

Poznámka. *Uzavretý hadík* je postupnosť $k \geq 4$ rôznych čiernych dlaždíc $a_1, a_2, \dots, a_k$ takých, že dlaždice a_i a a_{i+1} pre $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ a taktiež dlaždice a_k a a_1 majú spoločnú hranu.

Úloha 13 (IMO 1964, úloha 1). 17 ľudí si píše maily každý s každým. Každá dvojica diskutuje práve o jednej z troch tém. Ukážte, že existujú tri osoby, ktoré diskutujú o tej istej téme.

Úloha 14 (IMO SL 2016 C1). Teamleader na IMO vyberie kladné celé čísla $n > k$ a oznámi ich deputy leaderovi a súťažiacemu. Teamleader potom tajne povie deputy leaderovi n -miestny binárny reťazec X . Následne deputy leader napíše všetky n -miestne binárne reťazce, ktoré sa od reťazca X líšia práve na k miestach. (Např. ak $n = 3$, $k = 1$ a teamleader vyberie reťazec 011, tak deputy leader napíše 111, 001 a 010.) Súťažiaci sa pozrie na reťazce napísané deputy leaderom a háda reťazec X . Koľko najmenej pokusov (v závislosti od n, k) účastník potrebuje na to, aby uhádol reťazec X ?

Úloha 15 (Tournament of towns 1985). V Bumbálke je 32 študentov, ktorí sú zoskupení v 33 tajných matematických krúžkoch. Každý krúžok pozostáva z troch študentov a žiadne dva krúžky nemajú rovnaké zloženie. Dokážte, že existujú dva krúžky, ktoré majú práve jedného spoločného študenta.

Nápovedy k riešeniam

1.
 - Pri figúrok a podobných konštrukciách príde vhod uvažovať rôzne známe (či už z bežného života alebo olympiádnych úloh) ofarbenia políček – rozmiestnite jazdcov na políčka rovnakej farby bežného šachovnicového ofarbenia.
 - Chceme dokázať, že pri ľubovoľnom rozmiestnení 33 jazdcov existujú dvaja, ktorí sa ohrozujú. Takáto formulácia si pýta Dirichletov princíp. Resp. tu vieme využiť princíp delenia nášho problému (teraz šachovnice) na menšie, navzájom nezávislé časti. Ak rozdelíme šachovnicu na 32 navzájom ohrozujúcich sa skupín, tak v každej môže byť najviac jeden jazdec.
2.
 - Hoci táto úloha nezná, že je zadaná na Dirichletovo, dá sa preformulovať nasledovne: „Dokážte, že existujú dve pozície $i \leq j$ také, že $n \mid a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ “. Ostáva len sa vysporiadať, akú vlastnosť pozícií chceme sledovať.
 - Pri práci so súčtami súvislých podpostupností sa oplatí sledovať tzv. *prefixové súčty*, teda definovať si $n + 1$ čísel $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ (teda $s_0 = 0$). Teda sa pýtame, či existujú s_i, s_j také, že $n \mid s_i - s_j$.
3.
 - Ďalšou užitočnou technikou pri kombinatorických úlohách je počítanie nejakých vecí, často aj tú istú vec rôznymi spôsobmi. Často ju možno využiť pri bipartitných grafoch, teda v situáciách, kedy máme nejaké dva typy objektov (mužov a ženy / biele a čierne / párne a nepárne), pričom vzťahy musia byť vždy medzi rôznymi typmi (klebetiť / susediť / mať spoločného deliteľa).
 - a) Označte si počty klebetníkov a klebetníc a pomocou nich dvomi spôsobmi vyjadrite počet známostí.
 - b) Sporom. Ak neostane súvislá, pozrite sa na jej súvislú časť. Tá má podobné vlastnosti ako sieť zo zadania. Technikou ako pri a) dojdite ku sporu.
4.
 - Po vyskúšaní si malých prípadov si možno ľahko všimnúť, že pre $3 \mid n$ konštrukcia je možná. Skúste ju spraviť indukciou.
 - Môže byť strana n -uholníka zároveň aj stranou bieleho trojuholníka?
 - Uvažujte počet strán bielych a čiernych trojuholníkov a zistíte vzťah medzi týmito počtami. Z neho odvodte nutnú podmienku pre n .
5.
 - Akú časť okraja tabuľky môže obsahovať jedna oblasť?
 - Každá oblasť obsahuje 0 alebo 2 strany z okraja. Z toho priamo plynie dolný odhad na K . Konštrukcia je jednoduchá.
 - Pre horný odhad zistíte, akú plochu môže mať oblasť? Bude to chcieť kus rozobrať prípady.
6.
 - Užitočné jednoduché uvedomenie: Nech Σ je súčet prvkov množiny S . Našou úlohou je vlastne pre každé $m = 2, 3, \dots, n$ nájsť m -prvkovú podmnožinu S so súčtom $\Sigma/2$.
 - Proste skonštruujte vhodnú množinu. Pri takýchto konštrukciách je vhodné voliť čísla také pekné, aby sa nám ľahko dokazovalo, že naša množina vyhovuje.
 - Zoberte si n -prvkovú podmnožinu $X \subset S$ s polovičným súčtom. Teraz máte zatiaľ n prvkov z celkových $2n$. Viete z X spraviť $(n - 1)$ -prvkovú podmnožinu tak, aby ste „použili“ len jeden ďalší prvok z S ?

7.
 - Ako sa zvyknú dokazovať tvrdenia typu „existuje x prvkov s nejakou vlastnosťou“?
 - Existujú dve čísla, ktorých súčin je štvorec?
 - Urobte dvojkrokového dirichleta. Nájdite najprv dostatočne veľa štvorcov a z nich vyberte hľadanú štvrtú mocninu.
8.
 - Hneď v počiatkoch riešenia by vás mal napadnúť dolný odhad na K (založený na typických riešeniach súvisiacich úloh). Na základe toho sa potom pozrite na tabuľku priradených malých rozmerov.
 - Spomínaný dolný odhad je $K \geq 100$: Horst bude ukladať jazdcov len na čierne políčka (ktorých je 200). Vyskúšajte si na šachovnici 2×2 , ako sa úloha rieši.
 - Táto úloha je len C2 – správne riešenie je naozaj $K = 100$.
 - Pre jednoduchosť predpokladajme, že Horst hrá len na čierne políčka šachovnice 4×4 . Vie Queenie zaručiť, že jedno konkrétne biele rohové políčko bude po 4 kolách ohrozované niektorým Horstovým jazdcom?
9.
 - Pre $n = 9$ to je možné.
 - Správnym riešením sú $n = 9k$. Konštrukcia sa dá ľahko zovšeobecniť.
 - Diagonály sa pretínajú na špecifických miestach. Počítajte počty konkrétneho písmena na týchto políčok podľa riadkov, stĺpcov a uhlopriečok.
10. Uvažujte prefixové súčty $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ a ukážte, že existujú i a j také, že $s_i = s_j + 21$. Nevychádza dirichlet? Ako presne vyzerá taký prípad?
11.
 - Hoci je to 3-ka z celoštátka je ľahká.
 - Zamyslite sa nad tým, ako jednoducho by sa dala opísať konštrukcia.
 - Čo ak by „skoro všetci“ mali pravítka a kružidlo by získali vďaka podmienke, že majú prienik s „kružidlovým“ klubom?
12.
 - Skúste si úlohu vyriešiť pre malé prípady: už $n = 5$ je celkom zaujímavé.
 - Skúste získať nejaké netriviálne horné odhady. V úlohe sa objavujú „hadíky“, aký pojem vám to pripomína?
 - „Hadíky“ sú vlastne cykly v grafe. Ak graf s n vrcholmi nemá mať cyklus, tak môže mať najviac $n - 1$ hrán. Nájdite vhodný graf reprezentujúci situáciu a na základe neho získajte odhad.
 - Odhad pre $n = 5$ vyjde 19. Naozaj to ide dosiahnuť (hoci nie úplne triviálne).
 - Vďaka pekným rozmerom tabuľky konštrukcia ide spraviť pekne indukčne / rekurzívne.
13. Dvojkrokový dirichlet. Zoberte si jedného človeka a pozrite sa na ľudí, s ktorými si píše o jednej téme.
14.
 - Pozrite sa na X a jeho bitovú negáciu. Kedy ich vie účastník rozlíšiť na prvý pokus?
15. Ukážte, že jeden študent je v aspoň štyroch krúžkoch. Čo viete povedať o krúžkoch, v ktorých nie je?