

Kombinatorika

Jozef Rajník, KMS letné sústreďenie 2015, Tatranská lesná

1. Variácie, permutácie

- 1.1: Koľko vieme poskladať párnych 5-ciferných čísiel z cifier 2,3,4,5,7,9?
- 1.2: Šprintu na 100 m sa zúčastnilo 10 športovcov. Koľkými spôsobmi môžu obsadiť prvé tri priečky?
- 1.3: Na železničnej stanici majú 13 vozňov a chcú zo všetkých zostaviť vlak. Koľko rôznych vlakov vedia zostaviť?
- 1.4: Na železničnej stanici majú 13 vozňov:
- 2 vozne prvej triedy,
 - 1 reštauračný vozeň,
 - 6 oddielových vozňov,
 - 4 otvorené vozne.

Koľko rôznych vlakov vedia železničiar zložiť, ak vozne toho istého druhu pokladáme za rovnaké?

2. Kombinácie bez opakovania, kombinačné čísla

- 2.1: Malý Miško má 6 autíčok. Koľkými spôsobmi vie vybrať dvojicu autíčok, s ktorou sa bude hrať?
- 2.2: Na matematický krúžok chodí 8 detí. Koľkými spôsobmi možno z nich vybrať trojicu detí, ktorá bude reprezentovať školu v súťaži?
- 2.3: V triede je 30 žiakov. Na začiatku hodiny učiteľ vyvolá štyroch žiakov pred tabuľu odpovedať. Koľko rôznych štvoriec vie vyvolať k tabuľi?
- 2.4: V triede je 30 žiakov. Trieda sa chystá na výlet, ale zúčastniť sa výletu môže len 26 žiakov. Koľko rôznych skupín žiakov, ktoré pôjdu na výlet, možno vybrať?
- 2.5: Na matematický krúžok chodí 8 detí. V Bratislave na MAT-FYZe sa koná Akadémia Trojstenu, na ktorej sa deti z krúžku môžu zúčastniť. Koľko rôznych skupín detí sa môže zúčastniť Akadémie?
- 2.6: Roznásobte: $(a + b)^6$.
- 2.7: Roznásobte: $(a + b)^n$.

3. Kombinácie s opakovaním

- 3.1: Hodíme naraz dvoma hracími kockami. Koľko rôznych kombinácií čísel vieme hodiť?
- 3.2: Hodíme naraz ôsmimi kockami. Koľko rôznych kombinácií čísel vieme hodiť?
- 3.3: Traja bratia boli na záhrade oberať jablká. Nazbierali spolu 70 jabĺk. Koľkými spôsobmi si ich vedia rozdeliť? Koľko je takých rozdelení, kde každý z bratov dostane aspoň 10 jabĺk?

4. Ďalšie úlohy

- 4.1: Máme 32 sedmových kariet. Koľkými spôsobmi vieme z nich vybrať päťicu kariet, v ktorej je aspoň jedno eso?
- 4.2: Hodíme ôsmimi kockami. Koľkými spôsobmi môže na nich padnúť všetkých 6 hodnôt?
- 4.3: Na policike máme 12 kníh. Koľkými spôsobmi vieme z nich vybrať 5 tak, aby sme nevybrali dve vedľa seba?
- 4.4: V ľavom dolnom rohu štvorčekovej siete 8×11 štvorčekov stojí robot a chce sa dostať do protiahlého rohu štvorčekovej siete. Môže však chodiť iba po hranách štvorčekovej siete a pohybovať sa doprava alebo hore. Koľkými spôsobmi sa vie dostať do protiahlého rohu?

- 4.5:** Koľkými spôsobmi vieme na šachovnicu umiestniť 8 veží tak, aby sa žiadne dve neohrozovali?
- 4.6:** Vodka, Hopko a Miro dostali 27 cukríkov. Chcú si ich rozdeliť tak, aby Vodka a Hopko dostali spolu dvakrát viac ako Miro. Koľkými spôsobmi si ich vedia rozdeliť?
- 4.7:** Koľko je 16-ciferných čísel, ktorých cifry sú zľava doprava:
- a) v neklesajúcom poradí?
 - b) v nerastúcom poradí?
- 4.8:** Máme 52 žolíkových kariet (bez žolíkov). Koľkými spôsobmi vieme z nich vybrať usporiadanú šesticu kariet tak, aby v nej:
- a) boli karty aspoň piatich rôznych hodnôt,
 - b) sa každá farba vyskytovala najviac dvakrát,
 - c) boli karty práve troch rôznych hodnôt?
- 4.9:** Máme Hanojské veže so siedmimi kotúčmi. (Hanojské veže sa skladajú z troch kolíkov a siedmich kotúčov rôzneho priemeru, ktoré ukladáme na kotúče tak, aby kotúče s menším priemerom ležali na kotúčoch s väčším priemerom.) Koľkými spôsobmi vieme na kolíky rozložiť kotúče?
- 4.10:** Malý Mórisko sa hrá s magnetickými čísielkami. K dispozícii má čísla 2, 2, 2, 2, 5, 5, 6, 7. Koľko rôznych 5-ciferných čísel z nich vie zložiť?
- 4.11:** Koľko je prirodzených čísel menších ako 1000, ktoré nie sú deliteľné žiadnym z čísel:
- a) 3, 5;
 - b) 3, 5, 11;
 - c) 6, 14, 15?
- 4.12:** Koľko je 10-ciferných čísel neobsahujúcich nulu, ktorých ciferný súčin je deliteľný 10-mi?
- 4.13:** Koľkými spôsobmi vieme na šachovnicu umiestniť dve biele veže a čierneho kráľa do pozície šach-mat?
- 4.14:** Koľkými spôsobmi vieme na šachovnicu umiestniť 8 veží tak, aby ohrozovali celú šachovnicu? Políčko, na ktorom stojí veža považujte za ohrozené.
- 4.15:** Koľko existuje 11-ciferných čísel s ciferným súčtom 11?
- 4.16:** Rozhodnite, či medzi všetkými 8-cifernými násobkami čísla 4 je viac tých, ktoré vo svojom dekadickom zápise obsahujú cifru 1, alebo tých, ktoré cifru 1 neobsahujú. [MO-60-A-II-1]
- 4.17:** Do mriežky $2 \times n$ (riadky $\times$ stĺpce) vpisujeme písmená A , B , C . Koľkými spôsobmi to vieme urobiť
- a) hocijako,
 - b) aby sa v práve k stĺpcoch nachádzali nad sebou rovnaké písmená,
 - c) aby nikde neboli nad sebou ani vedľa seba rovnaké písmená.
 - d) v prvom riadku boli iba písmená A a v druhom riadku iba písmená B .
- (Písomka z MAT-FYZ-u: Úvod do kombinatoriky a teórie grafov)
- 4.18:** Volejbalového turnaja sa zúčastnilo šesť družstiev, každé hralo proti každému práve raz. V jednotlivých piatich kolách prebiehali vtom istom čase tri zápasy na troch kurtoch 1, 2 a 3. Koľko bolo možností pre rozpis takého turnaja? [MO-63-A-II-4]
- 4.19:** Hopko ide po schodišti, ktoré má n schodov, pričom jedným krokom vie prejsť jeden alebo dva schody. Koľkými spôsobmi vie vyjsť po schodišti?

5. Úlohy na rotáciu

- 5.1:** Koľkými spôsobmi sa môže 6-členný volejbalový tím rozostavať? Uvažujte, že tím sa počas hry točí, čiže ak vieme jedno rozostavenie dostať z druhého pootočením, považujeme ich za rovnaké.
- 5.2:** Máme okrúhly stôl s $2n$ stoličkami. Koľkými spôsobmi vieme zaň usadiť n chlapcov a n dievčat tak, aby žiadni dvaja chlapci a ani žiadne dve dievčatá nesesedeli vedľa seba.
- 5.3:** Na oslave sa zašli hostia zo siedmich rodín. Každá rodina pozostáva z otca, matky, syna a dcéry. V sále je 7-uholníkový stôl, kde pri každej hrane sú 4 stoličky. Koľkými spôsobmi vieme hostí rozsadiť za stôl tak, aby každá rodina spolu sedela za jednou hranou stola?
- 5.4:** Na oslave sa zišli hostia z n rodín. Každá rodina pozostáva z otca, matky, syna a dcéry. Koľkými spôsobmi vieme hostí usadiť za okrúhly stôl tak, aby každá rodina sedela vedľa seba?
- 5.5:** 10 chlapcov a 12 dievčat prišlo na ihrisko, kde si chcú posadať na 24-miestny kolotoč. Koľkými spôsobmi si vedia posadať tak, aby žiadni dvaja chlapci nesesedeli vedľa seba?
- 5.6:** Ketrin má guľôčky a farieb. Vyrába z nich náhrdelníky obsahujúce p guľôčok, ktoré sú aspoň dvoch rôznych farieb, pričom p je prvočíslo. Koľko rôznych náhrdelníkov vie Ketrin vyrobiť?