

Kombinatorika

Jozef Rajník, Prednáška z kvalifikácie MO, 9. 1. 2026

1 Invarianty a príbuzné techniky

Budeme sa venovať úlohám, v ktorých sa dejú nejaké procesy – typicky v nich máme opísané nejaké ťahy, ktoré môžeme robiť v zadanej situácii. Štandardnou otázkou je, či sa vieme dostať do nejakej špecifickej situácie, ale vieme sa pýtať aj na iné veci. Začneme klasickou úlohou.

- ♥ **Úloha 1.1.** Máme n vypnutých žiaroviek. V jednom kroku si vieme zvoliť ľubovoľné 2 žiarovky a prepnúť ich (teda z vypnutej sa stane zapnutá a naopak). Určte všetky kladné celé čísla n , pre ktoré vieme všetky žiarovky zapnúť.

Riešenie. Lahko pridáme na to, že pre párne n to ide – vtedy vieme rozdeliť žiarovky do dvojíc a postupne ich po dvojiciach poprepínať. Takto tiež zrejme nadobudneme pocit, že pre nepárne n to možné nebude. Ťažkou časťou tejto úlohy je to dokázať.

Sledujme počet zapnutých žiaroviek. V jednom ťahu vieme vybrať:

- dve vypnuté žiarovky – vtedy obe zapneme a počet zapnutých sa nám zvýši o 2;
- zapnutú a vypnutú žiarovku – vtedy sa nám ich stavy vymenia a počet zapnutých sa nezmení;
- dve zapnuté žiarovky – vtedy obe vypneme a počet zapnutých sa nám zníži o 2.

Teda každým ťahom sa k počtu zapnutých žiaroviek pripočíta $+2$, 0 alebo -2 . Takto sa však vieme dostať len na párne čísla. Preto keď n je nepárne, tak všetky žiarovky neprepneme.

Túto úvahu vieme sformulovať aj nasledovne. Počet zapnutých žiaroviek je stále párny, lebo:

- Na začiatku je počet zapnutých žiaroviek párny (0).
- Každým ťahom sa zvýši o $+2$, 0 alebo -2 , čo paritu nezmení.

□

Kľúčovou ideou riešenia tejto úlohy bolo zistiť, že nech robíme, čo robíme, počet žiaroviek bude stále párny. Tomuto pozorovaniu sa hovorí, že sme našli *invariant*. Ide o nejakú vlastnosť, ktorá sa počas uvažovaného procesu nemení. Nájdenie takejto vlastnosti nám vie umožniť (častokrát pomerne jednoducho) dokázať tvrdenia o skúmanom procese. Častokrát je však náročnou časťou úlohy nájsť správny invariant.

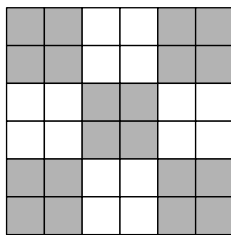
Úloha 1.2. V predošlej úlohe máme n žiaroviek a v jednom kole prepínáme k žiaroviek. Určte všetky dvojice kladných celých čísel n, k , pre ktoré vieme všetky žiarovky zapnúť.

Vo viacerých úlohách budeme dláždiť nejaké útvary. Pod dláždením myslíme uloženie prípustných dlaždíc bez prekryvania, pričom hranice dlaždíc pokladáme na hranice štvorčekov štvorčkovej siete. Ak nie je špecifikované inak, tak dlaždice môžeme otáčať a preklápať.

- ♥ **Úloha 1.3.** Máme štvorčekovú sieť rozmerov 6×6 . Položíme na ňu 8 dlaždíc rozmerov 1×4 , môžeme ich aj otáčať o 90° . Určte všetky políčka, ktoré môžu ostať nepokryté.

Riešenie. Pri tejto úlohe sa dá ľahko začať so skúšaním – skúsime si niekoľko spôsobov, ako poukladať 8 dlaždíc. Vieme tak prísť na nasledovné spôsoby.

Keď ich vhodne otočíme, tak dostaneme, že všetky políčka vyfarbené šedou farbou môžu ostať nepokryté. Tiež sa dopracujeme k pocitu, že toto asi budú všetky políčka.



Opäť stojíme pred náročnejšou časťou úlohy – ako dokázať, že iné políčka musia byť vždy zakryté? Skúste sa nad tým najprv sami zamyslieť. Nižšie nájdete niekoľko pomocných otázok.

- Pozrite sa na obrázok, v ktorom sú šedou vyfarbené všetky políčka, ktoré môžu ostať nepokryté. Tento obrázok vlastne už je hľadaný dôkaz. Len sa treba naň pozrieť a uvedomiť si, ako
- Pozrite sa na proces pokladania dlaždíc – čo sa stane, keď položíme jednu dlaždicu?

Keď položíme jednu dlaždicu, tak nech ju položíme akokoľvek, tak nám zakryje dve šedé a dve biele políčka. (To ľahko overíme vyskúšaním všetkých možností.) Počet bielych políčok¹ sa nám teda položením dlaždice zníži o 2. Na začiatku máme 16 bielych políčok. Preto po položení 8 dlaždíc budeme mať $16 - 8 \cdot 2$, teda 0 odkrytých bielych políčok. Takto sme dokázali, že po ľubovoľnom položení 8 dlaždíc nám ostanú voľné 4 šedé políčka. $\square$

Na tejto úlohe sme uvideli ďalšiu užitočnú techniku riešenia úloh tohto typu – *farbenie*. To spočíva v tom, že si danú situáciu (v našom prípade políčka štvorčekovej siete), rozdelíme na niekoľko skupín. To si vieme prirodzene reprezentovať zafarbením políčok. V mnohých úlohách hľadaný invariant využíva vhodné ofarbenie situácie.

Aby sme boli presnejší, v tejto úlohe sme nevyužili invariant – skúmali sme počet odkrytých bielych políčok a ten sa predsa menil. Menil sa však kontrolovane – každým krokom sa znížil o 2. Keď sa na to pozrieme všeobecne, tak nebudeme pri úlohách hľadať len invarianty, ale hocijaké vlastnosti, ktoré nám užitočne popíšu skúmaný proces. Ak by sme chceli skúmaný počet odkrytých bielych políčok nejako nazvať, tak sa odborne volá *monovariant*, keďže počas celého procesu ukladania dlaždíc sa len znižoval, teda bol monotónny. Samozrejme, monovariant môže aj rásť, napr. počet zakrytých bielych políčok.

Farbenia teda idú ruka v ruke s invariantami – taktiež nám vedia jednoducho vyriešiť úlohu, avšak vie byť ťažké ich nájsť. V predošlej úlohe správne farbenie prirodzene vyplynulo z jej riešenia. To však nie je vždy tak. Predstavte si len, žeby sa úloha pýtala na maximálny počet dlaždíc rozmerov 1×4 , ktorý možno umiestniť do štvorčekovej siete 6×6 . Túto úlohu sme vlastne vyriešili – na pokrytie celej siete potrebujeme $6 \cdot 6 / 4 = 9$ dlaždíc, každá z nich zakryje dve biele políčka z uvažovaného zafarbenia, ale tých je len 16. Pri takomto riešení však naše zafarbenie pôsobí ako nesmierny trik.

Nielen z úlohy 1.3, ale aj z mnohých iných úloh vieme dostať užitočné farbenia. Isto nám pomôže preriešiť si veľa úloh a získať tak prehľad o často používaných farbeniach (a aj invariantoch). Okrem toho však vieme zadanú úlohu preformulovať na inú, z ktorej nám vyjde hľadané farbenie. Riešenia cez

¹aj čiernych, ale tie nás pre potreby dôkazu nezaujímajú

farbenia sú riešenia obrázkom (resp. príkladom) – ukážeme vhodný obrázok a doplníme ho všeobecnou úvahou, prečo tento konkrétny obrázok dokazuje naše všeobecné tvrdenie. Keď si povieme, aký obrázok by sme asi chceli, tak sa dostaneme k úlohe, kde nám stačí nájsť vhodný obrázok / príklad / konštrukciu. A túto úlohu vieme riešiť skúšaním.

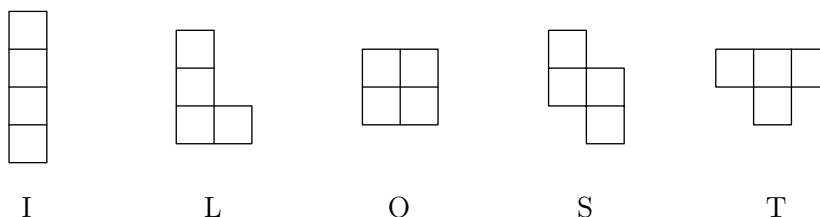
- ♥ **Úloha 1.4.** Na každom políčku štvorčekovej siete 6×6 je zhasnutá lampička. V jednom ťahu vieme zvoliť ľubovoľné štyri za sebou idúce lampičky v riadku alebo stĺpci a prepnúť ich. Je možné takýmito ťahmi zasvietiť všetky lampičky?

Úloha 1.5. V rade máme uložených n žiaroviek. V jednom kroku si vieme vybrať k po sebe idúcich žiaroviek a všetky z nich prepnúť. Určte všetky kladné celé čísla n , pre ktoré vieme všetky žiarovky zapnúť. Úlohu riešte:

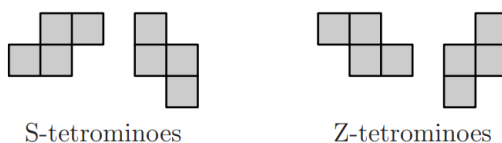
- pre $k = 2$,
- pre $k = 3$,
- všeobecne pre kladné celé číslo k .

Úloha 1.6 (KMS 15/16-Z2-7). Na každom políčku štvorčekovej siete $n \times n$ je zhasnutá lampička. V jednom ťahu vieme zvoliť ľubovoľných k za sebou idúcich lampičiek v riadku alebo stĺpci a prepnúť ich. V závislosti od kladných celých čísel n, k určte, či je možné takýmito ťahmi zasvietiť všetky lampičky.

V predošlých úlohách sme pracovali s útvarmi tvaru $1 \times k$ políčok. Vieme sa stretnúť aj s pestrejšími tvarmi. Tri políčka vieme okrem tvaru 1×3 usporiadať aj do tvaru L. Dosť rozšírené sú útvary zo štyroch políčok, nazývané tiež *tetrominá* (podobne ako domino z dvoch políčok), ktoré sú nasledovných typov.

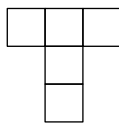


- ♥ **Úloha 1.7.** Pre každé z tetromín I, L, O, S, T určte všetky kladné celé čísla n , pre ktoré možno vybraným tetrominom vydláždiť celú štvorčekovú sieť rozmerov $n \times n$.
- ♥ **Úloha 1.8** (IMO SL 2014 C4). Na obrázku sú znázornené S-tetromino a Z-tetromino spolu so všetkými možnými otočeniami. Tetrominá nemožno preklápať, keďže preklopenie mení ich typ. Predpokladajme, že mnohoúholník P , ktorý má vrcholy v mrežových bodoch štvorčekovej siete, možno vydláždiť S-tetrominami. Dokážte, že bez ohľadu na to, ako vydláždime mnohoúholník P s použitím iba S- a Z-tetromín, tak zakaždým použijeme párny počet Z-tetromín.



- ♥ **Úloha 1.9** (IMO 1986-3). Vo vrcholoch päťuholníka sú umiestnené celé čísla tak, že súčet všetkých piatich čísel je kladný. Ak máme tri po sebe idúce vrcholy hodnoty v poradí x, y, z , pričom $y < 0$, tak ich možno nahradiť hodnotami v poradí $x + y, -y, z + y$. Toto opakujeme, kým medzi nimi existuje aspoň jedno záporné číslo. Zistíte, či tento postup musí skončiť po konečne veľa krokoch.

- ♥ **Úloha 1.10** (MO72 A-III-6). Nech n je prirodzené číslo také, že $n \geq 3$. Políčka tabuľky $n \times n$ sú na začiatku biele, V každom kroku zmeníme farby 5 štvorčekov tvoriacich útvar



v ľubovoľnom natočení buď z bielej na čiernu, alebo naopak. Rozhodnite, či je možné po konečnom počte krokov dosiahnuť to, že všetky štvorčeky budú čierne.

2 Úlohy na precvičenie

Ak sú úlohy na Vás moc ťažké, tak nejaké ľahké viete ešte nájsť v Zbierke KMS, ktorá je dostupná na <https://kms.sk/zbierka/>.

Úloha 2.1 (MO73 C-I-5). Na tabuli sú napísané čísla 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. V každom kroku čísla a , b , c napísané na tabuli zotrieme a nahradíme ich číslami ab , bc , ca . Zistite, či po nenulovom počte krokov bude niektoré z čísel napísaných na tabuli prirodzené.

Úloha 2.2 (KMS 10/11-3Z-5). Na tabuli je narysovaných 5 kružníc, 7 štvorcov a 9 trojuholníkov. Marek a Paľo hrajú hru, v ktorej striedavo robia ťahy. Urobiť ťah znamená zotrieť ľubovoľné dva obrazce a nahradiť ich jedným novým. V jednom ťahu možno nahradiť

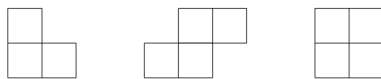
- dve kružnice kružnicou,
- dva trojuholníky štvorcom,
- kružnicu a trojuholník trojuholníkom,
- dva štvorce trojuholníkom,
- kružnicu a štvorec štvorcom,
- štvorec a trojuholník kružnicou.

Paľo vyhrá, ak na konci ostane štvorec. Marek vyhrá, ak na tabuli zostane trojuholník. Ukážte, pre ktorého hráča existuje víťazná stratégia, ak hru začína Marek. Popíšte túto stratégiu.

Úloha 2.3 (IMO SL 2002 C2). Políčka štvorčekovej siete $n \times n$, kde n je nepárne prirodzené číslo, sú šachovnicovo ofarbené čiernou a bielou farbou tak, že všetky rohové políčka sú čierne. *L-triomino* je tvorené tromi štvorčekmi usporiadaných do písmena L. Pre ktoré hodnoty n je možné zakryť všetky čierne políčka navzájom neprekrývajúcimi sa L-triomínami? Ak to je možné, aký je najmenší potrebný počet L-triomín?

- ♥ **Úloha 2.4** (OIM shortlist 2009, [1] Problem 3.4). Na každom políčku mriežky 8×8 políček sa nachádza zhasnutá lampa. V jednom ťahu si zvolíme ľubovoľnú lampu, ľubovoľný (vodorovný alebo zvislý) smer a prepneme zvolenú lampu spolu so susednými lampami vo zvolenom smere. Po nejakom počte ťahov nám ostane svietiť práve jedna lampa. Nájdite všetky políčka, na ktorých sa môže táto lampa nachádzať.

- ♥ **Úloha 2.5.** Tabuľku $(2n - 1) \times (2n - 1)$ štvorčekov vydláždime dlaždicami troch typov: triominá L, tetrominá S tetrominá O (môžeme ich otáčať a preklápať). Dokážte, že sme použili aspoň $4n - 1$ triomín L.



Úloha 2.6 (KMS 2003/04-L1-10). Feldo našiel na povale starú šachovú figúrku – delfína a spomenul si na vekmi zabudnutý kaprov problém. Delfín sa môže hýbať o 1 políčko doprava, o 1 políčko hore alebo o 1 políčko po diagonále doľava dole. Na začiatku stojí delfín v ľavom dolnom rohu šachovnice 8×8 . Dá sa s ním prejsť celá šachovnica tak, aby na každom políčku stál práve raz?

Úloha 2.7 (KMS 17/18-3Z-9). Linoleum na podlahe jedálne tvorí štvorčekovú mriežku $m \times n$ štvorčekov. V každom štvorčeku sa nachádza jeden stôl. Osvetlenie jedálne zabezpečujú lampy, ktoré sa nachádzajú v niektorých mrežových bodoch mriežky (vrátane tých na obvode, všetkých mrežových bodov je teda $(m+1)(n+1)$). Každá lampa osvetľuje stoly na tých štvorčekoch, v ktorých rohoch sa nachádza. V závislosti od prirodzených čísel m, n nájdite najmenší počet lúčpotrebný na to, aby každý stôl bol osvetlený aspoň dvomi lampami.

Úloha 2.8 (65MO-A-III-6). Na niektoré políčko šachovnice 6×6 postavíme figúrku kráľoviča. Tá môže v jednom ťahu poskočiť buď v zvislom, alebo vo vodorovnom smere. Dĺžka tohto skoku je striedavo jedno a dve políčka, pričom skokom dĺžky jedna (t. j. na susedné políčko) figúrka začína. Rozhodnite, či sa dá zvoliť východisková pozícia figúrky tak, aby po vhodnej postupnosti 35 skokov navštívila každé políčko šachovnice práve raz.

Úloha 2.9 (KMS 14/15-Z2-9). Hopko si z Ameriky objednal šachovnicu s rozmermi 7×7 a začal ju dláždiť, hneď ako ju dostal. K dispozícii mal dva typy dlaždičiek: S -ko zložené zo štyroch dlaždičiek a L -ko zložené z troch dlaždičiek. Dokážte, že ak chce Hopko takýmito dlaždičkami kompletne vydláždiť celú šachovnicu (bez prekryvov a bez kúskov vyčnievajúcich zo šachovnice), tak musí použiť práve jednu S -kovú dlaždičku.

Úloha 2.10 (APMO 2007). Na každom políčku tabuľky 5×5 je zhasnutá lampa. V jednom kroku si môžeme vybrať lampu a vybranú lampu spolu so všetkými lampami na susedných políčkach prepnúť. Po niekoľkých krokoch nám ostala svietiť jedna lampa. Nájdite všetky políčka, na ktorých to mohlo byť.

Úloha 2.11 (IMO SL 2009 C6). On a 999×999 board a limp rook can move in the following way: From any square it can move to any of its adjacent squares, i.e. a square having a common side with it, and every move must be a turn, i.e. the directions of any two consecutive moves must be perpendicular. A non-intersecting route of the limp rook consists of a sequence of pairwise different squares that the limp rook can visit in that order by an admissible sequence of moves. Such a non-intersecting route is called cyclic, if the limp rook can, after reaching the last square of the route, move directly to the first square of the route and start over. How many squares does the longest possible cyclic, non-intersecting route of a limp rook visit?

Úloha 2.12 (KMS 11/12-L3-11). Na šachovnici 8×8 nazývame dve políčka *dotýkajúce sa*, ak spolu susedia stranou alebo rohom. Určte, či dokáže šachový kráľ prejsť celú šachovnicu tak, že začína na nejakom políčku, a počnúc od druhého ťahu sa vždy pohne na políčko dotýkajúce sa s párnym počtom už navštívených políčk.

Úloha 2.13. Na z oboch strán nekonečnom rade políčk je rozmiestnených konečne veľa kameňov. Ak sa na nejakom políčku nachádzajú aspoň dva kamene, môžeme z tohto políčka zobrať dva kamene a položiť po jednom z nich na dve susedné políčka. Existuje počiatočné rozmiestnenie kameňov také, že po nenulovom konečnom počte spomenutých ťahov je možné dostať počiatočné rozloženie?

Úloha 2.14 (Stanford Putnam training 2007). (♥) Majme tabuľku $n \times n$, na ktorej je $n - 1$ čiernych políčk (zvyšné su biele). V jednom kroku si vieme vybrať biele políčko, ktoré susedí hranou s aspoň dvomi čiernymi, a zafarbiť ho načierno. Dokážte, že opakovaním takýchto krokov nevieme zafarbiť všetky políčka šachovnice načierno.

(!) **Úloha 2.15**. V tabuľke 4×4 môžeme presúvať štvorčeky na voľné miesto. Môžeme tak z konfigurácie naľavo dostať konfiguráciu napravo?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

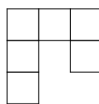
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Úloha 2.16 (Výberové sústredenie 2013/14). Šialený vedec zostrojil armádu robotov. Problém je v tom, že niektoré dvojice robotov sa nenávidia (nenávisť je vzájomná). Vždy však s robotmi vie urobiť jednu z nasledujúcich dvoch operácií:

- Ak nejaký robot nenávidí nepárny počet robotov, vedec ho môže zničiť.
- Vedec môže zdvojnásobiť armádu tak, že každý robot R sa rozdelí na dvoch robotov R_1 a R_2 . Pre každú dvojicu pôvodných robotov R, Q , ktorí sa nenávideli, sa budú nenávidieť aj roboti R_1 a Q_1 , aj roboti R_2 a Q_2 . Roboti R_1 a R_2 sa tiež nenávidia pre každého pôvodného robota R . To sú všetky dvojice robotov, ktoré sa budú nenávidieť po zdvojnásobení.

Dokážte, že vedec vie po konečnom počte operácií dostať armádu robotov, v ktorej neexistuje dvojica robotov, ktorá sa nenávidí.

Úloha 2.17 (IMO2004-3). Nazvime *hák* útvar vytvorený zo šiestich jednotkových štvorčekov ako na obrázku.



Nájdite všetky pravouholníky $m \times n$, ktoré sa dajú vydláždiť hákmi.

3 Ďalšie kombinatorické úlohy

Úlohy 1 a 2 sme riešili na prednáške.

Úloha 3.1 (KMS 15/16-1Z-7). Zajo si natiera plot, pričom dodržiava nasledujúce pravidlá:

- žiadne dve susedné latky nemajú rovnakú farbu,
- nevieme z plotu vybrať štyri latky (nie nutne susedné) bez zmeny ich poradia tak, aby boli natreté v poradí X, Y, X, Y , pre žiadne dve rôzne farby X, Y .

Koľko najviac latiek môže mať Zajov plot, ak nechce použiť viac ako n rôznych farieb?

Úloha 3.2. Vedec má niekoľko skúmaviek s na pohľad identickými kvapalinami. Práve jedna zo skúmaviek obsahuje jed. Vedec má k dispozícii n testovacích papierikov a k dní. Na začiatku dňa vie vedec každý papierik ponoriť do zmesy ľubovoľnej podmnožiny kvapalín. Pokiaľ zmes obsahuje čo i len kvapku jedu, papierik sa permanentne zafarbí načerveno, teda v ďalších dňoch je už nepoužiteľný. Pokiaľ zmes neobsahuje jed, tak sa s papierikom nič nestane a možno ho použiť ďalej.

V závislosti od kladných celých čísel n, k určte najväčší možný počet skúmaviek, ktoré vedec môže mať, aby zaručene počas k dní identifikoval skúmavku s jedom.

Úloha 3.3 (MEMO 2025, T4). Nech n je kladné celé číslo. V provincii Tramtária je $100n$ miest, z ktorých každé dve sú spojené priamou cestou. Každá z týchto ciest má mýtnicu, ktorá vyberá kladnú sumu mýtného. Pre každú cestu sa príjem jej mýtnice rovnomerne rozdelí medzi dve mestá na koncoch cesty (teda každé z týchto dvoch miest dostane polovicu mýta). Celkový príjem mesta je rovný súčtu príjmov, ktoré toto mesto získava zo $100n - 1$ mýtnic na svojich cestách.

Podľa nového zákona získa príjmy niektorých mýtnic federálna vláda namiesto miest prislúchajúcich týmto mýtniciam. Guvernér Tramtárie rozhoduje o tom, o ktoré mýtnice pôjde. Primátori miest požadujú, aby po tejto zmene každému mestu zostal celkový príjem vo výške aspoň 99 % jeho pôvodného celkového príjmu.

V závislosti od n nájdite najväčšie kladné celé číslo k také, že guvernér vie vždy vybrať k mýtnic, z ktorých bude federálna vláda získavať príjem, pričom uspokojí požiadavky primátorov miest.

Úloha 3.4 (KMS 11/12-Z3-7). (♥) Petržlena s CéDečkom už prestalo baviť hrať piškvorky. Preto CéDečko vymyslel novú kartovú hru. V tejto hre je $2n$ kariet položených na stole v rade za sebou. Na každej karte je zhora napísané prirodzené číslo. Jeden ťah spočíva v tom, že si hráč na ťahu zoberie kartu z kraja radu. Prvý ťahá CéDečko a ďalej sa s Petržlenom striedajú. Hra skončí, keď sa minú všetky karty na stole. Skóre hráča je súčet čísel na kartách, ktoré si potiahol. Dokážte, že CéDečko môže mať vždy aspoň také skóre ako Petržlen.

Úloha 3.5. Pre dané prirodzené číslo n nájdite najväčšie číslo k také, že možno do kruhu napísať postupnosť núl a jednotiek dĺžky k takú, že žiadna n -tica sa tam nevyskytuje dvakrát.

Úloha 3.6 (IMO 2002, úloha 1). Nech n je kladné celé číslo a nech T je množina všetkých bodov (x, y) v rovine, kde x a y sú celé nezáporné čísla a $x + y < n$. Každý bod z množiny T je ofarbený buď červenou, alebo modrou farbou. Ak je bod (x, y) červený, sú červené aj všetky body $(x', y') \in T$, pre ktoré platí $x' \leq x$ a $y' \leq y$. Nech X je počet spôsobov, ako môžeme vybrať n modrých bodov tak, že všetky ich x -ové súradnice sú rôzne a nech Y je počet spôsobov, ako môžeme vybrať n modrých bodov tak, že všetky ich y -ové súradnice sú rôzne. Dokážte, že platí $X = Y$.

Úloha 3.7 (AOPS). Máme 100 na pohľad nerozlíšiteľných mincí, z ktorých každá váži 1, 2 alebo 3 gramy. Je možné za pomoci 101 vážení zistiť hmotnosti všetkých mincí?

Úloha 3.8 (KMS 18/19-Z1-9). Keďže Betke je za Kikou smutno, upiekla jej ďalších 20 perníkov s váhami postupne 10, 20, ..., 200 gramov, ale nevie, ktorý perník koľko váži. Keď prišla na poštu zistila, že môže Kike poslať len dva perníky. Chvalabohu, Vodka je po ruke a je skúsený vážič jedla. Betka môže dať Vodkovi ľubovoľné dva perníky a Vodka jej povie, ktorý je ťažší. Žiaľbohu, Vodka to nerobí zadarmo. Zakaždým, keď dáva Betka Vodkovi vážiť perníky, musí mu dať spolu s nimi tretí perník, ktorý Vodka zje. Výsledok váženia Vodka povie až po zjedení perníka. Vie Betka týmto spôsobom zaručene nájsť dva perníky, ktoré spolu vážia aspoň a) 280 b) 300 gramov?

Úloha 3.9 (IMO 2017 Shortlist, C3). (?) Alex hrá nasledujúcu hru s 9 políčkami uloženými v riadku. Na začiatku sú všetky políčka prázdne. V každom svojom ťahu môže Alex vykonať práve jednu z nasledujúcich operácií:

- (1) Vyberie si ľubovoľné číslo tvaru 2^j , kde j je nezáporné celé číslo, a umiestni ho do ľubovoľného prázdneho políčka.
- (2) Vyberie si dve (nie nutne susedné) políčka, ktoré obsahujú to isté číslo; označme ho 2^j . V jednom políčku toto číslo nahradí číslom 2^{j+1} a z druhého políčka číslo vymaže.

Na konci hry obsahuje jedno políčko číslo 2^n , kde n je dané kladné celé číslo, a zvyšné políčka sú prázdne. V závislosti od n určte najväčší možný počet ťahov, ktoré Alex mohol spraviť.

Literatúra

[1] Problem solving methods in combinatorics

Nápovedy k riešeniam

- 1.8.**
- Ofarbite si polygón čierno-bielo tak, aby každé S zakrylo párny počet čiernych políčok a každé Z nepárny počet čiernych.
 - Také ofarbenie sa dá nájsť celkom jednoducho: začnite so štvorcom 2×2 a ďalej sa vám všetko určí.
- 1.9.**
- Nájdite monovariant, ktorý bude klesať. Avšak nemôže klesať neobmedzene, takže musí byť niečím ohraničený. Napr. skúste taký, ktorý môže byť iba nezáporný. Môžete skúšať rôzne výrazy.
 - Záporných čísel sa zbavíte, ak budete mať všetky čísla čo najviac rovnaké. Skúste hľadať také výrazy, ktoré majú malé hodnoty pre takmer rovnaké čísla.
- 1.10.**
- Odporúčam začať najprv konštrukciu, aby ste nabrali intuíciu, čo bude asi výsledok.
 - Áno, na odhad chcete nájsť nejaký invariant. Funguje klasický – zafarbíte nepárny počet políčok tak, aby každý ťah prepínal párne veľa. Dá sa však využiť aj zafarbenie viacerými farbami. Pamätajte, že chcete využiť podmienky deliteľnosti čísla n , kedy to nejde (na ktoré ste snáď prišli správne).
 - Všimnite si, že skúmaný útvar má v každom riadku a aj v každom stĺpci nepárny počet políčok.
- 2.2.**
- V skutočnosti sa hra skončí vždy rovnako, bez ohľadu na to, čo hráči robia. Treba nájsť správny invariant, ktorý zaručí, čo ostane na konci. Analyzujte jednotlivé ťahy, čo také by sa nemuselo meniť. Bude fajn do toho zakomponovať aj zvyšok po delení niečím.
 - Skúmajte zvyšok rozdielu počtu štvorcov a trojuholníkov po delení 3.
- 2.3.**
- Dostať sa k správne výsledku pri tejto úlohe nie je jednoduché. Odporúčam vám najprv dostatočne sa s úlohou pohrať.
 - Existuje n , pre ktoré vieme zakryť všetky čierne políčka. Ak ste také ešte nenašli, tak pohľadajte a skúste nájsť aj ďalšie.
 - Pre získanie horných odhadov sa pozrite na vhodnú podmnožinu čiernych políčok a spočítajte pokrývanie.
- 2.4.**
- Existuje jednoduchá konštrukcia, ako dostať jednu svietiacu lampu. Na ktorých políčkach ju vieme dostať?
 - Ak ste našli správne, jednu svietiacu lampu vieme dostať na dva ťahy. Takto vieme odstaviť osamotené lampy na políčkach dve políčka od nejakého kraja. Vyfarbite si to. Ako viete toto farbenie využiť?
 - Všimnite si, že každý ťah prepína párny počet nevyfarbených políčok.
- 2.5.** Nájdite ofarbenie také, že každé O a S zakryjú práve jeden štvorček a každé L zakryje najviac jeden štvorček. Potom len spočítajte

- 2.6.**
- Ofarbíte si šachovnicu tak, aby delfín pri každom pohybe menil farbu políčka. Prísť na ofarbenie je jednoduché. Stačí postupne farbiť podľa tejto podmienky.
 - Správne ofarbenie využíva 3 farby, ale z farby začiatočného políčka máme najmenej políčok (21).
- 2.7.**
- Nájsť konštrukcie by nemusel byť problém. Pre dolný odhad počtu lúčov nájdite vhodnú množinu stolov.
 - Ako základ zvolíte stoly tak, nech každá lampa osvecuje najviac vybraný jeden stôl. Sumujúc cez všetky vybrané stoly máme dolný odhad. V jednom prípade to však úplne nefunguje. Môžete vaše úvahy rozšíriť a dovoliť nejaké lampy osvetľujúce viac stolov.
- 2.8.**
- Opäť si zafarbíte šachovnicu tak, aby kráľovič pri svojich ťahoch vhodne menil farby.
 - Pri ťahoch o 1 funguje šachovnicové ofarbenie. Pri ťahoch o 2 tiež vieme ofarbiť šachovnicu dvomi farbami. Dokonca na štyri nezávislé časti (lebo ťahmi dĺžky 2 sa kráľovič vie hýbať len po štvrtine šachovnice). Skúste tieto farbenia skombinovať.
 - Mali by ste dospieť k ofarbeniu pomocou 4 farieb (ktoré je aj jedno z najznámejších). Aké farby navštívi kráľovič v štyroch po sebe idúcich ťahoch?
 - Ak sa vám nedarí prísť do sporu, lebo vám ostali nejaké políčka, na ktorých by kráľovič začínať mohol, tak ste už len kúsok od riešenia. Stačí vlastne spraviť to isté, len s trošičku iným farbením.
- 2.9.**
- Ofarbíte šachovnicu tak tak, aby každé S zakrývalo práve jedno čierne políčko. Rozmyslite si potom, či čiernych políčok chcete radšej viac alebo menej.
 - Označte si počet použitých S -iek a počítajte, ako to vychádza s pokrytými políčkami v jednotlivých farbách.
- 2.10.**
- Opäť nájdite štandardné ofarbenie – také, kde každý ťah prepína párny počet vyfarbených políčok.
 - Nie zrovna najjednoduchšie nájsť konštrukciu pre tie políčka, pre ktoré to ide.
- 2.11.**
- Aj pri tejto úlohe pôjde o vhodné ofarbenie šachovnice, len na prvý pohľad nie je jasné, čo by to ofarbenie malo sledovať. Skúste sa odvinúť od toho, že limp rook má na výber (s výnimkou prvého ťahu) najviac dve políčka na výber.
 - Ofarbíte si šachovnicu 4 farbami tak, aby
- 2.12.**
- Pri tejto úlohe nejde o farbiaci invariant. Skúste sa zamyslieť nad niečim iným. Zo zadania si môžete domyslieť, že to bude mať niečo s paritou, ako naznačuje zadanie.
 - Každé novo navštívené políčko susedí s párnym počtom už navštívených políčok. Skúste si tieto susednosti nejako zaznačiť do obrázka.
 - Susednosti si môžeme predstaviť ako dvere medzi susednými komnatami (políčkami), resp. aj ak hrany grafu. Každý ťah nám „míňa“ párny počet týchto susedností (dveré, hrán, ...)
- 2.14.**
- Nakreslite si niekoľko príkladov krokov. Môžete sa pozrieť aj na také, kde máte už súvislé útvary, príp. kde dostávate už štvorec. Čo majú tieto útvary spoločné, resp. v čom sa líšia len jedným smerom, žeby sme tam mohli mať monovariant.
 - Pozrite sa na obvod útvaru.

- 2.15.** Pri úlohách o permutáciách (teda postupnosť čísel $1, 2, \dots, n$ v nejakom poradí) sa oplatí študovať tzv. *počet inverzií* permutácie. Ide o počet dvojíc prvkov, ktoré sú v opačnom poradí.
- 2.16.**
- Nájdite monovariant, ktorý bude vyjadrovať, ako blízko ste cieľovému stavu. Ukážte, že ho viete znižovať.
 - Graf nám „zväčšuje“ druhá operácia. Preto ukážte, že druhú operáciu vieme vykompenzovať znížením monovariantu.
 - Ako vyzerajú grafy, ktoré vieme vybaviť len s 1. operáciou? Ako by potom mohli vyzeráť tie, kde operáciu 2 použijeme len raz, ...
- 2.17.**
- Háky sa vždy dajú popárovať, čím vytvoria 12-políčkové dlaždice dvoch typov.
 - Teda $12 \mid mn$. Nájdite konštrukcie, kedy to ide.
 - Pre vylúčenie prípadov nájdite vhodné ofarbenie tabuľky.
 - Všimnite si, že celkom pekne funguje, keď ofarbujeme po stĺpcoch alebo po riadkoch. Skúste sa od toho odpichnúť.
 - Z nájdených konštrukcií sa dá prísť na to, že chcete ukázať podmienku $24 \mid mn$, teda musíme mať párne veľa dlaždíc. Teda aj naše farbenie by chcelo mať niečo s paritou.
- 3.4.**
- Vedel by si CéDečko nejako zaručiť, aké čísla si vlastne zoberie?
 - Áno vedel. Vhodne si rozdeľte čísla na dve polovice, aby CéDečko vel zobrať takú, ktorej súčet nie je menší ako druhej.
 - Ofarbite si karty striedavo bielou a čiernou farbou a hrajte za CéDečka tak, aby nútil Petržlena brať len tú horšiu farbu.
- 3.5.**
- Preložte si úlohu do teórie grafov.
 - Nechte hľadať (Hamiltonovskú) kružnicu cez všetky vrcholy, lebo to je ťažký problém. Chcete hľadať niečo jednoduchšie cez všetky *veci*. Otázka je, čo sú to tie veci a ako následne tú úlohu tak na grafy transformovať.
 - Preložte zadanie ako orientovaný graf a hľadajte v ňom uzavretý (Eulerov) ťah prechádzajúci každou hranou práve raz.
- 3.9.** Riešte úlohu všeobecne pre k políčok miesto 9 a odvoďte rekurzívny vzťah.