

Teória grafov

Jozef Rajník

1 Prehľad užitočných tvrdení o grafoch

Veta 1. V každom grafe je počet vrcholov nepárneho stupňa párny.

Veta 2. Nech G je graf s n vrcholmi. Nasledovné tvrdenia sú ekvivalentné

- (i) G je strom, teda súvislý acyklický graf.
- (ii) Každé dva vrcholy grafu G sú spojené práve jednou cestou.
- (iii) G je súvislý graf, ale po odobraní akejkoľvek hrany už súvislý nebude.
- (iv) G je acyklický graf, ale po pridaní ľubovoľnej hrany už acyklický nebude.
- (v) G je súvislý graf s $n - 1$ hranami.
- (vi) G je acyklický graf s $n - 1$ hranami.

Veta 3 (Euler). Nech G je súvislý rovinný graf s v vrcholmi, e hranami a f oblasťami. Potom

$$v - e + f = 2.$$

Veta 4 (O Eulerovom ťahu). Graf obsahuje uzavretý (otvorený) Eulerov ťah práve vtedy, keď je **súvislý** a má všetky stupne párne (až na dva vrcholy nepárneho stupňa).

Veta 5 (O orientovanom Eulerovom ťahu). Orientovaný graf obsahuje uzavretý Eulerov ťah práve vtedy, keď je silno súvislý a do každého vrchola vchádza rovnako veľa hrán, ako z neho vychádza.

Veta 6 (Ore). Ak v grafe s n vrcholmi majú každé dva nesusedné vrcholy súčet stupňov aspoň n , tak obsahuje Hamiltonovskú kružnicu.

Veta 7 (O bipartitných grafoch). Graf je bipartitný práve vtedy, keď neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.

Veta 8 (Brooks). Nech G je graf s maximálnym stupňom Δ . Nech χ je najmenší počet farieb, ktorý je potrebný na zafarbenie vrcholov grafu G tak, že každé dva susedné vrcholy majú rôznu farbu. Potom

- (i) ak G je úplný graf alebo cyklus nepárnej dĺžky, tak $\chi = \Delta + 1$;
- (ii) inak $\chi \leq \Delta + 1$.

Veta 9 (Vizing). Nech G je graf s maximálnym stupňom Δ . Nech χ' je najmenší počet farieb, ktorý je potrebný na zafarbenie hrán grafu G tak, že každé dve susedné hrany majú rôznu farbu. Potom

$$\Delta \leq \chi' \leq \Delta + 1.$$

Veta 10 (Hall). Bipartitný graf G s partíciami A, B obsahuje párovanie pokrývajúce množinu A práve vtedy, keď každá podmnožina $X \subseteq A$ má v množine B aspoň $|X|$ susedov.

Veta 11 (Tutte). Graf G obsahuje perfektné párovanie práve vtedy, keď pre každú množinu vrcholov X má graf $G - X$ najviac $|X|$ komponentov súvislosti nepárnej veľkosti.

Veta 12 (Mantel). Graf na n vrcholov, ktorý neobsahuje trojuholník má najviac $n^2/4$ hrán.

Veta 13 (Turán). Graf na n vrcholoch, ktorý neobsahuje $r + 1$ vrcholov, ktoré sú spojené každý s každým, má počet hrán najviac

$$\frac{r-1}{r} \cdot \frac{n^2}{2} = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \cdot \frac{n^2}{2}$$

2 Rozbehové úlohy

Úloha 1. Dokážte, že ak graf má minimálny stupeň $\delta \geq 2$, tak obsahuje kružnicu dĺžky aspoň $\delta + 1$.

Úloha 2 (61MO-B-I-5 a)). Dokážte, že regulárny bipartitný graf má partície rovnakej veľkosti.

Úloha 3 (61MO-B-I-5 b)). Nech G je bipartitný súvislý 3-regulárny graf. Dokážte, že G ostane súvislý aj po odstránení ľubovoľnej a) hrany, b) ľubovoľného vrchola.

Úloha 4. Pre ktoré n a k existuje k -regulárny graf s n vrcholmi?

Úloha 5. Nech G je 4-regulárny graf. Dokážte, že G ostane súvislý aj po odstránení ľubovoľnej hrany.

Úloha 6. Doážte, že graf, ktorého každý vrchol má stupeň aspoň 3, obsahuje kružnicu párnej dĺžky. Musí obsahovať aj kružnicu nepárnej dĺžky?

Úloha 7 (KMS 17/18-1L-7). Ježiško má pripravených m rôznych darčiekov, z každého jeden kus. Na svete je n detí ($n \leq m$). Pre kladné celé číslo $i \leq n$, i -te dieťa má z Ježiškových m darčiekov vyhladených d_i darčiekov, po ktorých túži ($1 \leq d_i \leq m$). Ježiško vie, že platí

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_n} \leq 1.$$

Dokážte, že Ježiško môže rozdať deťom po jednom darčeku tak, aby každé dieťa dostalo darček, po ktorom túži.

Úloha 8. V skupine n platí, že ak vyberieme ľubovoľných štyroch ľudí, tak aspoň jeden z nich pozná zvyšných troch (známosti sú vzájomné). Dokážte, že existuje človek, čo pozná všetkých ostatných.

Úloha 9 (KMS 14/15-1Z-8). Mišo sa hrá na Spidermana a vyrobil si doma pavučinu. Tá pozostáva z 3^n kamienkov, kde n je prirodzené číslo, pričom každá dvojica kamienkov je spojená práve jednou nitkou. Za chvíľu sa vrátia Mišovi rodičia, a tak potrebuje pavučinu rozplieť. Rozpletá ju nasledovným spôsobom: vyberie si trojicu kamienkov, medzi ktorými sú zatiaľ všetky tri nitky, a tieto tri nitky odstráni. Dokážte, že takýmto spôsobom vie postupne z pavučiny odobrať všetky nitky.

Úloha 10. V skupine $n > 6$ detí má každé dieťa práve troch kamarátov (kamarátsvo je vzájomné). Dokážte, že deti možno rozdeliť na dve neprázdne skupiny tak, že každé dieťa v skupine má v nej aspoň dvoch svojich kamarátov.

Úloha 11. Dokážte, že vrcholy každého grafu G , ktorého minimálny stupeň je aspoň 1, možno rozdeliť na dve skupiny tak, že každý vrchol má suseda v druhej skupine ako je on sám.

3 Trikové úlohy

Úloha 12 (KMS 2002/3-L1-11). Máme mn mrežových bodov usporiadaných do obdĺžnikovej siete $m \times n$ bodov. Spomedzi mrežových bodov je $m + n$ bodov zafarbených načerveno. Každé dva červené body, ktoré sa nachádzajú v rovnakom riadku alebo v rovnakom stĺpci sú spojené červenou čiarou. Dokážte, že sa tam musí nachádzať uzavretá lomená čiara z červených spojníc.

Úloha 13. Nech $M = \{1, 2, \dots, 17\}$. Dokážte, že existuje postupnosť 5-prvkových podmnožín množiny M , v ktorej

1. každé dve za sebou idúce podmnožiny sú disjunktné;

2. sa každá dvojica navzájom disjunktných 5-prvkových podmnožín množiny M nachádza práve raz vedľa seba.

Úloha 14. Dané sú dva štvorcové kusy papiera, každý s obsahom 2003. Každý papier je rozdelený na 2003 mnohouholníkov s obsahom 1 (rozdelenia môžu byť rôzne). Jeden kus papiera položíme na druhý. Dokážte, že môžeme pomocou 2003 špendlíkov prepichnúť všetkých 4006 mnohouholníkov.

Úloha 15 (Rusko, 2001). Na párty je $2n + 1$ ľudí. Vieme, že ak si vyberieme skupinu ľubovoľných n ľudí, tak existuje mimo tejto skupiny účastník párty, ktorý pozná všetkých ľudí z tejto skupiny. Dokážte, že na párty je účastník, ktorý pozná všetkých účastníkov párty.

Úloha 16 (KMS 2018/19-Z3-9). V Nemecku je $2n$ miest, z ktorých sú niektoré dvojice spojené cestou. Z každého mesta vychádzajú práve tri cesty: čierna, červená a žltá. Hovoríme, že v Nemecku možno zaviesť ekonomickú rovnováhu váhy k , ak:

- Každá cesta je vlastnená práve jedným z dvoch miest, ktoré spája.
- Ak mesto A vlastní cestu do mesta B , tak mesto B platí mestu A denne x eur, kde x je kladné celé číslo menšie ako k (nie nutne rovnaké pre každú cestu).
- Každé mesto denne zaplatí za prenájom ciest rovnako veľa, ako dostane od iných miest.

Nájdite, v závislosti od n , najmenšie také celé číslo k , že v Nemecku možno zaviesť ekonomickú rovnováhu váhy k .

Úloha 17. Pre dané prirodzené číslo n nájdite najväčšie číslo k také, že možno do kruhu napísať postupnosť núl a jednotiek dĺžky k takú, že žiadna n -tica sa tam nevyskytuje dvakrát.

Úloha 18 (Výberko 2014, 18). Šialený vedec zostrojil armádu robotov. Problém je v tom, že niektoré dvojice robotov sa nenávidia (nenávisť je vzájomná). Vždy však s robotmi vie urobiť jednu z nasledujúcich dvoch operácií:

- (i) Ak nejaký robot nenávidí nepárny počet robotov, vedec ho môže zničiť.
- (ii) Vedec môže zdvojnásobiť armádu tak, že každý robot R sa rozdelí na dvoch robotov R_1 a R_2 . Pre každú dvojicu pôvodných robotov R, Q , ktorí sa nenávideli, sa budú nenávidieť roboti R_1, Q_1 aj roboti R_2 a Q_2 . Roboti R_1 a R_2 sa tiež nenávidia pre každého pôvodného robota R . To sú všetky dvojice robotov, ktoré sa budú nenávidieť po zdvojnásobení.

Dokážte, že vedec vie po konečnom počte operácií dostať armádu robotov, v ktorej neexistuje dvojica robotov, ktorá sa nenávidí.

4 IMO-ish úlohy

V úlohe 19 dávam do pozornosti hlavne horný odhad a v úlohe 20 časť b). Zvyšné časti tých úloh sú hlavne o hraní.

Úloha 19 (KMS 2017/18-L3-10). V hlavnom meste kolónie dokončujú námestie. Plochu $(2^n + 1) \times (2^n + 1)$ chcú vydláždiť bielymi a čiernymi dlaždicami rozmeru 1×1 . Dlaždiť musia tak, aby z čiernych dlaždíc nevznikol uzavretý hadík. V závislosti od kladného celého čísla n určte, koľko najviac čiernych dlaždíc môžu použiť?

Poznámka. Uzavretý hadík je postupnosť $k \geq 4$ rôznych čiernych dlaždíc $a_1, a_2, \dots, a_k$ takých, že dlaždice a_i a a_{i+1} pre $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ a taktiež dlaždice a_k a a_1 majú spoločnú hranu.

Úloha 20 (IMO Shortlist 2015, C2). Nech $\mathcal{V}$ je konečná množina bodov roviny. Hovoríme, že množina $\mathcal{V}$ je *vyvážená*, ak pre ľubovoľné dva rôzne body $A, B \in \mathcal{V}$ existuje bod $C \in \mathcal{V}$ taký, že $|AC| = |BC|$. Hovoríme, že množina $\mathcal{V}$ je *decentralizovaná*, ak pre ľubovoľné rôzne body $A, B, C \in \mathcal{V}$ neexistuje žiaden bod P , pre ktorý platí $|PA| = |PB| = |PC|$.

a) Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 3$ existuje vyvážená množina pozostávajúca z n bodov.

b) Pre ktoré celé čísla $n \geq 3$ existuje vyvážená decentralizovaná množina pozostávajúca z n bodov?

Úloha 21 (Estónsko 2007, Výberko 2017). Uvažujme štvorčekovú mriežku $n \times n$, kde n je kladné celé číslo. V jednom ťahu vyberieme štyri políčka, ktoré ležia na prieniku dvoch riadkov a dvoch stĺpcov a na každé z nich položíme žetón. Tento ťah môžeme spraviť len vtedy, keď aspoň jedno zo štyroch vybraných políčok je prázdne. V závislosti od čísla n určte najväčší počet ťahov, ktorý môžeme spraviť, ak začíname s prázdnu mriežkou.

Úloha 22 (IMO Shortlist 2019, C4). V rovnice zvanej Camelot, kráľ Artuš postaví labyrint $\mathcal{L}$ pozostávajúci z n stien – priamok. Žiadne dve steny nie sú rovnobežné a žiadne tri steny sa nepretínajú v jednom bode. Potom Merlin zafarbí jednu stranu každej steny namodro a druhú stranu načerveno.

V mieste prieniku dvoch stien sa nachádzajú štyri rohy: v dvoch z nich sa stretá modrá a červená stena, v jednom dve červené a v poslednom dve modré steny. V každom prieniku dvoch stien sú umiestnené obojsmerné dvere, ktoré spájajú tie dva protíahlé rohy, v ktorých sa stretávajú steny rôznych farieb.

Potom, čo Meril zafarbí steny, Morgana umiestni niekoľko rytierov do labyrintu. Rytieri sa môžu po ňom slobodne hýbať, môžu prechádzať cez dvere, nie však cez steny.

Nech $k(\mathcal{L})$ je najväčšie celé číslo k také, že bez ohľadu na to, ako Merlin ofarbí Labyrint, Morgana vie vždy umiestniť aspoň k rytierov do labyrintu tak, že žiadny dvaja sa nemôžu stretnúť. Pre každé n nájdite všetky možné hodnoty, ktoré vie $k(\mathcal{L})$ nadobudnúť pre nejaký labyrint $\mathcal{L}$ s n stenami.

Úloha 23 (IMO 2019, ú. 3 (C5)). Sociálna sieť má 2019 používateľov. Niektoré dvojice z nich sú priatelia, pričom ak používateľ A je priateľ používateľa B , tak používateľ B je priateľ používateľa A . Opakovane môže nastať takáto udalosť:

Traja (rôzni) používatelia A, B a C sú takí, že A sa priatelí s B aj s C , ale B a C nie sú priatelia. V istom okamihu sa B a C spriatelí a zároveň sa A s B aj s C priateliť prestane. Všetky ostatné vzťahy pritom zostanú zachované.

Na začiatku je 1010 používateľov s 1009 priateľmi a 1009 používateľov s 1010 priateľmi. Dokážte, že existuje postupnosť takýchto udalostí, po ktorých sa každý používateľ bude priateliť najviac s jedným iným používateľom

Úloha 24 (IMO Shortlist 2015 C7). Vo firme sú niektoré dvojice ľudí nepriateľmi. Skupinu ľudí nazývame *asociálnou*, ak obsahuje nepárny počet ľudí, ktorý je aspoň 3 a zároveň je možné týchto ľudí usadiť okolo okrúhleho stola tak, že každý sedí medzi dvomi svojimi nepriateľmi. Ak viete, že v spoločnosti je najviac 2015 asociálnych skupín, dokážte, že je možné rozdeliť všetkých ľudí firmy na 11 častí tak, že žiadny dvaja nepriatelia sa nenachádzajú v rovnakej skupine.

5 Ďalšie úlohy

Úloha 25 (IMO 2006, úloha 2). Nech P je pravidelný 2006-uholník. Jeho uhlopriečka sa nazýva dobrá, ak jej koncové body rozdeľujú hranicu mnoho uholníka P na dve časti, z ktorých každá pozostáva z nepárneho počtu strán. Strany mnoho uholníka P sa tiež považujú za dobré. Predpokladajme, že P je rozdelený na trojuholníky 2003 uhlopriečkami, z ktorých žiadne dve nemajú spoločný bod vo vnútri P . Nájdite maximálny možný počet rovnoramenných trojuholníkov, ktoré majú dve dobré strany.

Úloha 26 (KMS 2017/18-L1-10). V KMS je niekoľko vedúcich a niektoré dvojice sa spolu kamarátia. Namiesto toho, aby si užívali pokojné Vianočné sviatky, sa radšej hádajú, či je krajšia fialová alebo modrá farba. Na začiatku si každý vedúci myslí, že krajšia je fialová. Občas sa stane, že jeden vedúci zorganizuje stretnutie a pozve naň všetkých svojich kamarátov. Po tomto stretnutí sa všetkým zúčastneným vedúcim zmení názor. Je možné, že po niekoľkých stretnutiach si budú všetci vedúci myslieť, že je krajšia modrá? (Bez ohľadu na to, ako sa vedúci kamarátia.)

Úloha 27 (KMS 06/07, 1. zimná séria, úloha 11). Na ostrove žije n domorodcov. jedného dňa náčelník rozhodol, že všetci (vrátane neho) si urobia a budú nosiť náhrdelník zložený z 0 alebo viac jednofarebných kamienkov. Dvaja domorodci majú mať aspoň jeden kameňok rovnakej farby práve vtedy, keď sú priatelia.

- a) Dokážte, že domorodci môžu splniť náčelníkov rozkaz.
- b) Aký je minimálny počet farieb kamienkov potrebný na to, aby sa dal splniť náčelníkov rozkaz bez ohľadu na priateľské vzťahy na ostrove?

Úloha 28 (OMM 2009). Na párty je n osôb. Vieme, že medzi ľubovoľných štyroch osôb existujú tri osoby, ktoré poznajú každá s každou alebo existujú tri osoby, medzi ktorými sa žiadne dve nepoznajú. Dokážte, že ich vieme rozdeliť na dve skupiny, kde v jedenej skupine sa budú všetci poznať a v druhej skupine sa nikto nebude poznať.

Náznaky riešení

- 1 Uvažujte najdlhšiu cestu a jej koncový vrchol.
- 2 Dvomi spôsobmi spočítajte počet hrán.
- 3 Pozrite sa na jeden komponent grafu a vyjadrite si počet hrán cez veľkosti partícií.
- 5 Pozrite sa na jeden komponent. Koľko vrcholov nepárneho stupňa má mať?
Alternatíva: Využite Eulerov ťah.
- 6 Z najdlhšej cesty nájdite dve dotýkajúce sa kružnice a uvažujte o paritách.
- 7 Indukcia, odoberte dieťa, ktoré chce najviac darčiekov – ukážte, že chce aspoň n .
- 8 Indukcia, odoberte A , potom nejaký B pozná všetkých. Ak sa pozná každý z každým, tak je to easy. Ak existujú C a D , čo sa nepoznajú, zoberte štvoricu A, B, C, D – v nej musí A poznať B a teda B pozná všetkých $+A$.
- 9 Indukcia. Rozdeľte na 3 kôpky po 3^n kamienkov. Nikty medzi nimi odstráňte takto: pre každé a, b odstráňte nikty medzi kameňmi číslo a, b a $a + b$ (z každej kôpky jeden kameň).
- 10 Zoberte najmenší cyklus ako jednu skupinu. Ak má aspoň 5 vrcholov, je to zjavne OK. Ak má menej a nie je OK, priberte doňho ďalšie vrcholy, nie je veľa možností, ako môže vyzeráť situácia.
- 11 Môžete skúsiť indukciu. Ako alternatíva si môžete uviesť, že hrany navyše vám neprekážajú. Spravte z grafu stromy a rozdeľte ich do skupín.

12 Reprezentujte si situáciu grafom. Vrcholy sú riadky a stĺpce, teda $m + n$ vrcholov. Hranou spojíme vrchol riadku i a vrchol stĺpca j práve vtedy, ak mrežový bod v i -tom riadku a j -tom stĺpci je červený. Toto je pomerne štandardný spôsob reprezentácie bodov / políčok v mriežke pomocou grafu.

13 Definujte si graf, ktoré dvojice množín môžu ísť vedľa seba a povedzte si v grafovej reči, čo chcete dokázať.

14 Využite Hallovu vetu.

15 Nájdite vhodný medzikrok, ktorý dokázať. Ako by mohla vyzeráť posledná úvaha? Ukážte, že tam je K_{n+1} .

16 Cesty dvoch farieb tvoria disjunktné kružnice. Využite tieto kružnice (nie nutne všetky) na nájdenie rovnováhy.

17 Hamiltonovská kružnica sa hľadá ťažko. Preto si definujte graf tak, že skúmané n -tice budú jeho hrany a hľadajte Eulerovský ťah. (Orientovaný.)

18 Skúmajte chromatické číslo grafu. Chcete dostať graf s chromatickým číslom 1. Stačí nájsť spôsob, ako ho zmenšiť.

19 Horný odhad: Reprezentujte si situáciu priamočiario ako graf (políčka sú vrcholy) a využite odhad pre počet hrán bez cyklu.

Konštrukcia: Priamočiary odhad naozaj ide dosiahnuť. Využite, že rozmer je mocnina dvojky-ish, na čom sa dobre robí indukcia.

20 .

- Pre nepárne n si zoberte vrcholy pravidelného n -uholníka.
- Pokúste sa zostrojiť graf, ktorým opíšete situáciu a ukážete, že n musí byť párne.
- Pre každú trojicu vrcholov (A, B, C) takú, že $|AC| = |BC|$ pridajte do grafu orientované hrany $A \rightarrow C$ a $B \rightarrow C$.
- Koľko hrán bude mať takýto graf? Ako bude vyzeráť a čo viete povedať o parite n ?

21 Zafarbíme pri každom ťahu jedno vybrané políčko, ktoré dostalo svoj prvý žetón, nafuchsiovo a zvyšné vybrané políčka, ktoré ešte nie sú zafarbené, na natyrkysovo. Reprezentujte si políčka grafom ako v úlohe 12.

Dokážte, že graf odpovedajúci tyrkysovým políčkam je súvislý a obsahuje všetky vrcholy.

Použite na to indukciu cez počet ťahov. Dokazujte, že farebné políčka a tyrkysové políčka rozdeľujú graf na rovnaké komponenty súvislosti po každom ťahu.

22 Pozrite sa na graf, ktorého vrcholy sú oblasti labyrintu a hranou sú spojené tie oblasti, čo sú spojené dverami.

Koľko vrcholov a koľko má tento graf? Koľko najmenej komponentov môže mať?

Ukážte, že Merlin vie tento minimálny počet komponentov dosiahnuť. Napr. ofarbite východnú stranu každej steny jednou farbou.

23 Dostaňte najprv strom, potom už niet čo pokaziť. Dostať strom znamená, že chceme zachovať súvislosť grafu + uvedomiť si nejaké očividné monovarianty / invarianty.

25 Uvažujte graf, vrcholy sú trojuholníky, hrany spájajú trojuholníky, ak zdieľajú nejakú nedobrú hranu.

- Každý vrchol má stupeň 1 alebo 3. Dobré trojuholníky majú stupeň 1.

26 Použite indukciu. Nevychádza? Povedzte si, čo to znamená a uveďte si, že vám do dáva dostatok informácií na dokončenie úlohy.

27 Rozdeľte na párny a nepárny prípad a indukcia na počet hrán.