

Dirichletov princíp 2

Jozef Rajník, Letná škola Trojstenu 15. – 26. 7. 2024

Veta 1 (Dirichletov princíp). Ak máme viac hulubov ako holubníkov, tak v aspoň jednom holubníku musia byť aspoň dva holuby.

Veta 2 (Dirichletov princíp – frekvenčná forma). Ak máme n holubníkov a viac ako kn holubov, tak v aspoň jednom holubníku musí byť aspoň $k + 1$ holubov.

Veta 3 (Dirichletov princíp – nekonečná forma). Ak máme konečne veľa holubníkov a nekonečno holubov, tak v aspoň jednom holubníku musí byť nekonečno holubov.

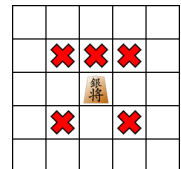
Priamočiare úlohy

- **Úloha 1** ([1]). Na štvorcovom stole $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ sedí 151 múch. Dokážte, že hrncom s polomerom $1/7\text{ m}$ dokážeme zabiť sedem múch jednou ranou.
- **Úloha 2.** Pre Fibonacciho čísla platí $F_1 = F_2 = 1$ a $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ pre všetky prirodzené čísla k . Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n existuje Fibonacciho číslo, ktoré sa končí na n núl.
- **Úloha 3.** Koľko najmenej čísel musíme vybrať z množiny $\{1, \dots, 20\}$, aby medzi vybranými číslami zaručene existovali dve, z ktorých jedno delí to druhé?

Úloha 4. V priestore máme 9 bodov s celočíselnými súradnicami. Dokážte, že existujú dva body, ktorých ťažisko má celočíselné súradnice.

Úloha 5. Koľko najviac jazdcov možno umiestniť na šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 6 (KMS 20/21-Z3-5). Figúrka *strieborný generál* (pochádza z japonského šachu) ohrozuje štyri políčka, s ktorými má spoločný iba roh a jedno políčko priamo pred sebou (ako na obrázku 1). Figúrku možno otáčať do 4 smerov, pričom figúrka má vyznačené, na ktorej strane má predok (je tam zúžená). Najviac koľko strieborných generálov možno umiestniť na šachovnicu rozmerov 8×8 tak, aby žiaden strieborný generál neohrozoval iného?



Úloha 7 (KMS 10/11-3L-7). Vedúci KMS radi klebetia a každý z nich pozná niekoľko klebiet. Každí dvaja vedúci poznajú aspoň jednu rovnakú klebetu. Navyše žiadni dvaja nepoznajú presne tie isté klebety (aj v prípade, že Kubko pozná len klebetu A a Maľko klebety A a B , hovoríme, že poznajú iné klebety). Koľko najviac vedúcich môže mať KMS, ak všetci dokopy poznajú práve 6 rôznych klebiet?

Úloha 8. Vedúci KMS radi klebetia a každý z nich pozná niekoľko klebiet. Všetci dokopy poznajú 5 klebiet. Opäť žiadni dvaja nepoznajú presne tie isté klebety. Koľko najmenej vedúcich musí obsahovať KMS, aby zaručene existovali dvaja vedúci taký, že jeden vedúci pozná všetky klebety druhého vedúceho?

Úloha 9 (KMS 18/19-Z1-6). Figúrka *povýšený strelec* ohrozuje políčka, ktoré sa nachádzajú v rovnakej uhlopriečke (ako strelec v bežnom šachu) a navyše aj políčka, ktoré majú spoločnú hranu s políčkom, na ktorom povýšený strelec stojí. Koľko najviac povýšených strelcov možno umiestniť na šachovnicu rozmerov 9×9 tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 10 (KMS 15/16-Z3-5, upravené). Koľko najmenej veží musíme umiestniť na šachovnicu rozmerov 8×8 , aby sme z nich vedeli vybrať 4 veže, z ktorých sa žiadne dve neohrozuju, a to ani potom, čo nevybrané veže dáme preč.

Úloha 11. V rovine je daných 13 bodov s celočíselnými súradnicami. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať tri body, ktorých ťažisko má celočíselné súradnice.

Úloha 12 (PraSe 00/01, [1]). Hrací plán hry „Človeče, nezlob sa!“ pozostáva z 36 políček umiestnených do kruhu. Nájdite najmenšie také celé číslo n , že pri ľubovoľnom rozmiestnení n čísel a ľubovoľnom hode kockou vieme pohybom nejakej figúrky vyhodíť inú.

Úloha 13 (PraSe 2000/01-3-3, [1]). Mesto New York sa skladá zo 151 severovýchodných a 151 východozápadných ulíc, ktoré tvoria pravidelnú štvorčekovú sieť s hranou malého štvorčeka 100 metrov (šírku ulíc zanedbávame). V uliciach mesta je 11 401 telefónnych búdok. Ukážte, že existuje dvojica telefónnych búdok vzdialená najviac 200 metrov chôdze po ulici.

- **Úloha 14** (MEMO 2023 T3). Nájdite najmenšie celé číslo b s nasledujúcou vlastnosťou: Pre každé ofarbenie práve b políček na šachovnici rozmerov 8×8 na zeleno je možné umiestniť 7 strelcov na 7 zelených políček tak, aby sa žiadni dvaja strelci neohrozovali.

Menej priamočiare úlohy

Úloha 15 (PraSe 98/99-1-1, [1]). Nájdite čo najdlhšiu aritmetickú postupnosť prirodzených čísel s diferenciou 60, ktorá je tvorená samými prvočíslami.

Úloha 16 (PraSe 94/95). Dokážte, že medzi ľubovoľnými ôsmimi zloženými prirodzenými číslami menšími ako 361 existujú vždy dve čísla, ktoré majú spoločného deliteľa.

→ **Úloha 17** (IMO 1964, úloha 1). 17 ľudí si píše maily každý s každým. Každá dvojica diskutuje práve o jednej z troch tém. Ukážte, že existujú tri osoby, ktoré diskutujú o tej istej téme.

→ **Úloha 18**. Máme postupnosť 48 celých čísel. Dokážte, že z nej vieme vybrať súvislú podpostupnosť, ktorej súčet je deliteľný 47-mi. Platí to aj pre postupnosť 47 celých čísel?

Úloha 19 (PraSe 2000/01, 3. séria, úloha 4). Šachista Dominik sa chystá na dôležitý turnaj. Na tréning má 76 dní a každý deň chce zahrať aspoň jednu partiu, celkom však nie viac než 132. Dokážte, že v niekoľkých po sebe idúcich dňoch, odohral presne 21 partii.

→ **Úloha 20**. Máme štvorčekovú sieť pozostávajúcu z 100×100 políčok, ktorej tri strany sú ohraničené stenou. Na každom políčku je šípka, ktorá ukazuje buď hore, dole, vľavo, alebo vpravo. Na jedno z políčok položíme chrobáka. Každú sekundu sa chrobák pohne na susedné políčko v smere šípky na políčko, kde akurát stojí. Potom sa šípka na políčku, ktoré chrobák akurát opustil, otočí o 90° v smere hodinových ručičiek. Pokiaľ sa v niektorú sekundu chrobák nevie pohnúť (lebo má pred sebou stenu), tak ostane na mieste, avšak šípka sa stále otočí. Je možné, že chrobák nikdy neopustí štvorčekovú sieť?

Ťažké úlohy

→ **Úloha 21**. Máme za sebou v nejakom poradí napísané čísla 1, 2, ..., 101. Dokážte, že z nich vieme vyškrtnúť 90 z nich tak, aby zvyšných 11 čísel tvorilo rastúcu alebo klesajúcu postupnosť.

→ **Úloha 22** (Erdősova-Szekeresova veta, 1935). Máme ľubovoľnú postupnosť $ab + 1$ rôznych čísel. Dokážte, že existuje jej rastúca podpostupnosť obsahujúca aspoň $a + 1$ členov alebo jej klesajúca podpostupnosť obsahujúca aspoň $b + 1$ členov.

Poznámka. Postupnosť A je *pospostupnosťou* postupnosti B , ak z postupnosti B možno vyškrtat niekoľko členov tak, aby ostala postupnosť A . Napr. (4, 2, 7) je podpostupnosťou (17, 4, 42, 47, 2, 7).

Úloha 23 (OMM 1998). Strany a uhlopriečky pravidelného osemuholníka sú zaferbené modrou a červenou. Ukážte, že medzi čiarami možno nájsť aspoň 8 jednofarebných trojuholníkov, ktorých vrcholy sú vo vrcholoch osemuholníka.

Úloha 24 (Rusko 2000). Tabuľka 100×100 je rozdelená na jednotkové štvorčeky, ktoré sú zafarbené štyrmi farbami tak, že v každom stĺpci a v každom riadku je z každej farby 25 políčok. Dokážte, že existujú dva riadky a dva stĺpce také, že štyri políčka na ich prieniku majú rôzne farby.

Úloha 25 (IMO 1985, úloha 4). Máme daných 1985 kladných celých čísel takých, že žiadne z nich nemá prvočíselného deliteľa väčšieho ako 23. Dokážte, že medzi nimi existujú 4 čísla, ktorých súčin je štvrtou mocninou celého čísla.

Úloha 26 (Peru 2009). Na schôdzi sa zúčastnilo 100 poslancov z troch krajín. Niektoré dvojice poslancov sa navzájom poznajú. Ukážte, že na schôdzi sú dvaja poslanci A, B rôznych krajín takí, že existuje 17 poslancov z tretej krajiny, ktorí buď poznajú všetci oboch poslancov A, B , alebo každý z nich sa nepozná ani s poslancom A , ani s poslancom B .

Úloha 27 (Tournament of towns 1985). Máme 32 študentov, ktorí sú zoskupení v 33 matematických krúžkoch. Každý krúžok pozostáva z troch študentov a žiadne dva krúžky nemajú rovnaké zloženie. Dokážte, že existujú dva krúžky, ktoré majú práve jedného spoločného študenta.

Úloha 28. Koľko najviac navzájom disjunktných podmnožín množiny $M = \{1, 2, \dots, n\}$ vieme vytvoriť?

Literatúra

[1] Dávid Stanovský, Dirichletov princíp, dostupné na <https://prase.cz/library/DirichletuvPrincipDS/DirichletuvPrincipDS.pdf>

Plno ďalších úloh rôznych obtiažností aj s riešeniami nájdete na <http://mks.mff.cuni.cz/library/DirichletuvPrincipDS/DirichletuvPrincipDS.pdf>. Taktiež odporúčam Zbierku KMS kms.sk/zbierka.

Dávam tiež do pozornosti online prednášku, ktorá obsahuje aj riešené náročnejšie úlohy: <https://www.youtube.com/watch?v=JYDVFxYEMSO>

Ako hľadať dôkazy cez Dirichletov princíp

Najviac priamočiare použitie Dirichletovho princípu vyzerá zhruba takto:

1. Prečítame si zadanie a zistíme, koľko prvkov máme nájsť a s akou vlastnosťou. Prvky budú naše holuby.
2. Odhadneme, koľko holubníkov chceme mať.
3. Pokiaľ v zadaní vyberáme niekoľko prvkov z nejakej množiny A (čísla, políčka zo šachovnice), rozdelíme množinu A na m holubníkov. Pre každý z nich musí platiť, že ľubovoľné dva prvky z neho musia mať hľadanú vlastnosť. Rozdelenie hľadáme skúšaním, kreslením, ako by to mohlo vyzeráť, čo by množiny mohli obsahovať.
4. Spíšeme dôkaz.

Samozrejme, sú úlohy, napr. úloha ??, v ktorých treba použiť Dirichletov princíp viac sofistikovane a na prvý pohľad nie je jasné, čo budú holuby a čo holubníky.

Riešenie úlohy 3

Rozložme si množinu $A = \{1, 2, \dots, 20\}$ nasledovne:

$$A_1 = \{1, 2, 4, 8, 16\},$$

$$A_2 = \{3, 6, 12\},$$

$$A_3 = \{5, 10, 20\},$$

$$A_4 = \{7, 14\},$$

$$A_5 = \{9, 18\},$$

$$A_6 = \{11\},$$

$$A_7 = \{13\},$$

$$A_8 = \{15\},$$

$$A_9 = \{17\},$$

$$A_{10} = \{19\}.$$

Vidíme, že ak z ľubovoľnej množiny A_i vyberieme dva prvky, tak jeden bude deliť druhý. Keďže z množiny A vyberáme 11 čísel, ale máme iba 10 množín, tak z Dirichletovho princípu musíme vybrať dve čísla a, b z tej istej množiny A_i . Vďaka našej voľbe množín A_i pre tieto dve čísla a, b platí, že jedno delí druhé. Tým sme dokázali, čo sme mali.

Pri riešení sme mohli povedať „Vidíme“, lebo množín a ich prvkov je málo a ide o konkrétne množiny. Túto vlastnosť teda vieme skontrolovať pohľadom. Pri väčších (teda aj nekonečných) množinách by sme mali takúto vlastnosť dokázať.

Hinty k niektorým úlohám

1 Pokryte štvorec 25 kruhmi s polomerom $1/7$.

Pri hľadaní pokrytia môže prísť vhod 6-uholníková sieť.

2 Príde vhod dodefinovať si $F_0 = 0$. Sledujte dvojicu posledných dvoch Fibonacciho čísel po delení n .

3 Každému číslu priradte jeho najväčšieho nepárneho deliteľa.

4 Pozrite sa na paritu súradníc. Koľkými spôsobmi môže byť nakombinovaná?

5 32, dajte ich na čierne políčka. Pre odhad si podelte šachovnicu do dvojíc políčok, ktoré sa navzájom ohrozujú.

6 32, opäť si podelte políčka do dvojíc.

7 $2^5 = 32$. Všetci vedúci poznajú tú istú klebetu. Prečo viac nejde? Každú podmnožinu klebiet spárujte s jej doplnkom.

- 8** $11 (= \binom{5}{2} + 1)$. Môžeme mať 10 vedúcich, kde každý pozná len dve klebety. Všetky možné množiny klebiet zoradíte do 10 radov, tak, aby v každom rade postupne vždy pribúdala jedna nová klebeta.
- 10** 25. Rozdeľte si šachovnicu na 8 „uhlopriečok“ po 8 políčkoch – ak uhlopriečka narazí na stranu štvorca, tak pokračuje z druhej strany.
- 11** Ukážte, že spomedzi 5 čísel možno vybrať 3, ktorých súčet je deliteľný tromi.
- 12** 18 nestačí, ak dáme figúrky na striedačku a hodíme jednotku. Ak pohybom figúrky o k nevieme nič vyhodiť, tak každej figúrke priradíme voľné políčko.
- 13** Rozdeľte si množinu bodov na uliciach do najviac 11 400 útvarov. Zoberte si križovatku a do každého smeru 100 m ulice a pokryte takýmito útvarmi celý New York.
- 15** Nájdite prvočíslo, ktoré bude deliť nejaký člen postupnosti. Sledujte zvyšky. Dobrým kandidátom je prvočíslo 7.
- 16** Číslo $2 \cdot 101$ zjavne môže byť vybrané, ale $19 \cdot 47$ nie. Sledujte vhodné prvočísla. Pre každé z vybraných čísel zoberte najmenšie prvočíslo, ktoré ho delí.
- 17** Dvojkrokový dirichlet. Zoberte si jedného človeka a pozrite sa na ľudí, s ktorými si píše o jednej téme.
- 18** Pozrite sa na čísla $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{48}$. V programovaní sa postupnosť takýchto súčtov nazýva *prefixové súčty*. Áno, platí to aj pre 47 čísel.
- 19** Uvažujte prefixové súčty $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ a ukážte, že existujú i a j také, že $s_i = s_j + 21$. Nevychádza dirichlet? Ako presne vyzerá taký prípad?
- 20** Na niektorom políčku musel byť chrobák nekonečne veľa krát. A kde všade ešte musel byť nekonečne veľa krát?
- 21** Viď ďalší hint.
- 22**
- Ako by ste napísali program, ktorý by našiel najdlhšiu rastúcu a klesajúcu podpostupnosť?
 - Využité *dynamické programovanie*: pre každé číslo postupne určíte dĺžku najdlhšej rastúcej podpostupnosti, ktorá sa končí v danom čísel. To isté spravte aj pre klesajúcu.
 - Pre každý člen ste si napísali dvojicu čísel. Čo musí pre tieto dvojice platiť? Čo by sa stalo, ak by najdlhšia rastúca a klesajúca postupnosť boli postupne dlhé najviac a, b ?
- 23** Spočítajte počet dvojíc uhlopriečok rôznych farieb, ktoré zdieľajú rovnaký vrchol.
- 24** Spočítajte dvojice políčkoch, ktoré sú v rovnakom riadku a majú rôznu farbu. Vyberte dvojicu stĺpcov, kde je týchto dvojíc najviac.
- 25** Urobte dvojkrokového dirichleta. Nájdite najprv dostatočne veľa štvorcov a z nich vyberte hľadanú štvrtú mocninu.
- 26** Spočítajte počet trojíc (A, B, C) takých, že A, B, C sú z rôznych krajín a buď A aj C poznajú B , alebo A ani C nepoznajú B .
- 27** Ukážte, že jeden študent je v aspoň štyroch krúžkoch. Čo viete povedať o krúžkoch, v ktorých nie je?
- 28** $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ – napr. všetky $\lfloor n/2 \rfloor$ -prvkové podmnožiny. Pre horný odhad vytvorte pre každú z nich holubník. Rozdeľte si všetky podmnožiny do niekoľkých levelov podľa počtu prvkov. Pre $k < \lfloor n/2 \rfloor$ chcete vlastne každej k -prvkovej množine pridať do holubníka nejakú $(k + 1)$ -prvkovú podmnožinu. Podobne pre $k > \lfloor n/2 \rfloor$.