

# Dirichletov princíp

Jozef Rajník, KMS online prednáška, 21. 2. 2021

**Veta 1** (Dirichletov princíp). Ak máme viac hľubov ako holubníkov, tak v aspoň jednom holubníku musia byť aspoň dva hľuby.

**Veta 2** (Dirichletov princíp – frekvenčná forma). Ak máme  $n$  holubníkov a viac ako  $kn$  hľubov, tak v aspoň jednom holubníku musí byť aspoň  $k + 1$  hľubov.

Plno ďalších úloh rôznych obtiažností aj s riešeniami nájdete na <http://mks.mff.cuni.cz/library/DirichletuvPrincipDS/DirichletuvPrincipDS.pdf>. Taktiež odporúčam Zbierku KMS [kms.sk/zbierka](http://kms.sk/zbierka).

## Ľahké úlohy

**Úloha 1.** Dokážte, že z ľubovoľných štyroch celých čísel vieme vybrať dve čísla, ktorých rozdiel je deliteľný tromi.

**Úloha 2.** Dokážte, že z ľubovoľných  $n + 1$  celých čísel množno vybrať dve, ktorých rozdiel je deliteľný číslom  $n$ .

**Úloha 3.** Dokážte, že medzi ľubovoľnými 12-timi rôznymi celými dvojčifernými číslami nájdeme dve, ktorých rozdiel je dvojčiferné číslo s oboma ciframi rovnakými.

**Úloha 4.** Dokážte, že v Bratislave žijú dvaja ľudia, ktorý sa narodili v rovnaký deň toho istého roku. Viete nájsť mesto alebo štát, v ktorom to nemusí platiť?

**Úloha 5.** Dokážte, že ak hodíme 12-krát dvomi hracími kockami, tak zaručene existuje súčet, ktorý sme hodili v aspoň dvoch hodoch.

**Úloha 6.** Spomedzi čísel 1, 2, ..., 100 vyberieme ľubovoľných 52 čísel. Dokážte, že zakaždým možno spomedzi nich vybrať dve čísla, ktorých súčet je deliteľný stami.

**Úloha 7.** Dokážte, že spomedzi ľubovoľných 52 celých čísel možno zakaždým vybrať dve čísla, ktorých súčet alebo rozdiel je deliteľný stami.

**Úloha 8.** Spomedzi čísel 1, 2, ..., 42 vyberieme 22 čísel. Dokážte, že sme zaručene vybrali dve čísla, ktoré sa líšia práve o 1.

**Úloha 9.** Vo vnútri rovnostranného trojuholníka o strane dĺžky 2 sa nachádza päť bodov. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dvojicu bodov, ktoré sú od seba vo vzdialenosti najviac 1.

**Úloha 10.** Vlk zje každý deň aspoň jednu ovcu, no najviac tri ovce. Medveď zje každý deň aspoň štyri ovce, no najviac sedem oviec. Dokážte, že v každom týždni existujú dva dni, keď bača utrpí rovnakú škodu.

**Úloha 11** ([1]). V štvorci s rozmermi  $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$  je zakreslených 101 bodov. Dokážte, že v ňom existuje trojuholník s obsahom  $1\text{ cm}^2$ , ktorý obsahuje aspoň dva z daných bodov.

**Úloha 12.** Dokážte, že ak hodíme 34-krát dvomi hracími kockami, tak zaručene bude existovať súčet, ktorý sme hodili aspoň štyrikrát.

**Úloha 13.** Hodíme zaručene štyrikrát rovnaký súčet, ak hodíme dvomi kockami len 33-krát?

**Úloha 14** (PraSe 94/95, [1]). Dokážte, že vo štvorci s rozmermi  $6\text{ cm} \times 6\text{ cm}$ , kde je zakreslených 37 bodov, existuje štvorec  $2\text{ cm} \times 2\text{ cm}$ , ktorý obsahuje aspoň päť z daných bodov.

**Úloha 15.** V priestore máme 9 bodov s celočíselnými súradnicami. Dokážte, že existujú dva body, ktorých ťažisko má celočíselné súradnice.

**Úloha 16.** Koľko najviac veží možno umiestniť na šachovnicu tak, aby sa žiadne dve neohrozovali?

## Mierne ťažšie úlohy

**Úloha 17.** S pomedzi čísel  $1, 2, \dots, 2n$  vyberieme ľubovoľných  $n + 1$  (rôznych) čísel. Dokážte, že medzi vybranými číslami musia existovať dve, z ktorých jedno delí to druhé.

**Úloha 18.** Koľko najviac strelcov možno umiestniť na šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

**Úloha 19.** Koľko najviac jazdcov možno umiestniť na šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

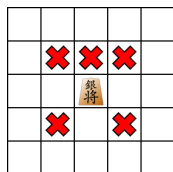
**Úloha 20** ([1]). Na štvorcovom stole  $1\text{m} \times 1\text{m}$  sedí 151 múch. Dokážte, že hrncom s polomerom  $1/7\text{ m}$  dokážeme zabiť sedem múch jednou ranou.

**Úloha 21.** Dokážte, že na každej párty sú dvaja ľudia, ktorí poznajú rovnako veľa ostatných ľudí z párty.

**Úloha 22.** Pre Fibonacciho čísla platí  $F_1 = F_2 = 1$  a  $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$  pre všetky prirodzené čísla  $k$ . Dokážte, že pre každé prirodzené číslo  $n$  existuje Fibonacciho číslo, ktoré sa končí na  $n$  núl.

**Úloha 23.** Na šachovnici  $8 \times 8$  je rozmiestnených 17 strelcov. Dokážte, že zakaždým vieme spomedzi nich vybrať troch strelcov tak, aby sa navzájom neohrozovali, a to ani potom, čo nevybraných strelcov dáme preč.

**Úloha 24** (KMS 20/21-Z3-5). Figúrka *strieborný generál* (pochádza z japonského šachu) ohrozuje štyri políčka, s ktorými má spoločný iba roh a jedno políčko priamo pred sebou (ako na obrázku 1). Figúrku možno otáčať do 4 smerov, pričom figúrka má vyznačené, na ktorej strane má predok (je tam zúžená). Najviac koľko strieborných generálov možno umiestniť na šachovnicu rozmerov  $8 \times 8$  tak, aby žiaden strieborný generál neohrozoval iného?



Obr. 1: Políčka, ktoré ohrozuje strieborný generál.

**Úloha 25** (KMS 15/16-Z3-5). Na šachovnici  $8 \times 8$  je rozmiestnených 25 veží. Dokážte, že z nich vieme vybrať 4 tak, aby sa žiadne dve z nich neohrozovali, a to ani potom, čo nevybrané veže dáme preč.

**Úloha 26.** Dokážte, že medzi 6-timi ľuďmi vždy existujú traja takí ľudia, že každý pozná každého alebo nikto nepozná nikoho.

**Úloha 27.** V rovine je daných 13 bodov s celočíselnými súradnicami. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať tri body, ktorých ťažisko má celočíselné súradnice.

**Úloha 28** (PraSe 00/01, [1]). Hrací plán hry „Človeče, nezlob sa!“ pozostáva z 36 políčok umiestnených do kruhu. Nájdite najmenšie také celé číslo  $n$ , že pri ľubovoľnom rozmiestnení  $n$  čísel a ľubovoľnom hode kockou vieme pohybom nejakej figúrky vyhodíť inú.

**Úloha 29** (PraSe 98/99-1-1, [1]). Nájdite čo najdlhšiu aritmetickú postupnosť prirodzených čísel s diferenciou 60, ktorá je tvorená samými prvočíslami.

**Úloha 30** (PraSe 94/95). Dokážte, že medzi ľubovoľnými ôsmimi zloženými prirodzenými číslami menšími ako 361 existujú vždy dve čísla, ktoré majú spoločného deliteľa.

**Úloha 31** (PraSe 2000/01-3-3, [1]). Mesto New York sa skladá zo 151 severojužných a 151 východozápadných ulíc, ktoré tvoria pravidelnú štvorčekovú sieť s hranou malého štvorčeka 100 metrov (šírku ulíc zanedbávame). V uliciach mesta je 11 401 telefónnych búdok. Ukážte, že existuje dvojica telefónnych búdok vzdialená najviac 200 metrov chôdze po ulici.

## Dirichlet a efektívne algoritmy

Pri nasledujúcich úlohách pomôže zamyslieť sa nad tým, ako by sme efektívne napísali program, ktorý by hľadanú vec našiel.

**Úloha 32.** Máme postupnosť 48 celých čísel. Dokážte, že z nej vieme vybrať súvislú podpostupnosť, ktorej súčet je deliteľný 47-mi. Platí to aj pre postupnosť 47 celých čísel?

**Úloha 33.** Máme za sebou v nejakom poradí napísané čísla  $1, 2, \dots, 101$ . Dokážte, že z nich vieme vyškrtnúť 90 z nich tak, aby zvyšných 11 čísel tvorilo rastúcu alebo klesajúcu postupnosť.

**Úloha 34** (Erdősova-Szekeresova veta, 1935). Máme ľubovoľnú postupnosť  $ab + 1$  rôznych čísel. Dokážte, že existuje jej rastúca podpostupnosť obsahujúca aspoň  $a + 1$  členov alebo jej klesajúca podpostupnosť obsahujúca aspoň  $b + 1$  členov.

*Poznámka.* Postupnosť  $A$  je *pospostupnosťou* postupnosti  $B$ , ak z postupnosti  $B$  možno vyškrtat' niekoľko členov tak, aby ostala postupnosť  $A$ . Napr.  $(4, 2, 7)$  je podpostupnosťou  $(17, 4, 42, 47, 2, 7)$ .

## Ťažké úlohy

**Úloha 35** (PraSe 2000/01, 3. séria, úloha 4). Šachista Dominik sa chystá na dôležitý turnaj. Na tréning má 76 dní a každý deň chce zahrať aspoň jednu partiu, celkom však nie viac než 132. Dokážte, že v niekoľkých po sebe idúcich dňoch, odohral presne 21 partíí.

**Úloha 36** (IMO 1964, úloha 1). 17 ľudí si píše maily každý s každým. Každá dvojica diskutuje práve o jednej z troch tém. Ukážte, že existujú tri osoby, ktoré diskutujú o tej istej téme.

**Úloha 37** (IMO 1972, úloha 1). Máme 10 dvojčiferných čísel. Dokážte, že z nich vieme vybrať dve disjunktné množiny s rovnakým súčtom.

**Úloha 38** (Rusko 2000). Tabuľka  $100 \times 100$  je rozdelená na jednotkové štvorčeky, ktoré sú zafarbené štyrmi farbami tak, že v každom stĺpci a v každom riadku je z každej farby 25 políčok. Dokážte, že existujú dva riadky a dva stĺpce také, že štyri políčka na ich prieniku majú rôzne farby.

**Úloha 39** (IMO 1985, úloha 4). Máme daných 1985 kladných celých čísel takých, že žiadne z nich nemá prvočíselného deliteľa väčšieho ako 23. Dokážte, že medzi nimi existujú 4 čísla, ktorých súčin je štvrtou mocninou celého čísla.

**Úloha 40** (Tournament of towns 1985). V Bumbálke je 32 študentov, ktorí sú zoskupení v 33 tajných matematických krúžkoch. Každý krúžok pozostáva z troch študentov a žiadne dva krúžky nemajú rovnaké zloženie. Dokážte, že existujú dva krúžky, ktoré majú práve jedného spoločného študenta.

## Literatúra

[1] Dávid Stanovský, Dirichletov princíp, dostupné na <https://prase.cz/library/DirichletuvPrincipDS/DirichletuvPrincipDS.pdf>

## Hinty k niektorým úlohám

1 Možné zvyšky sú len tri a máme štyri čísla.

2 Možných zvyškov je len  $n$  a máme  $n + 1$  čísel.

3 Čím je deliteľné dvojčiferné číslo s oboma ciframi rovnakými?

4 Spočítajte, koľko je rôznych možných dátumov narodenia. Je ich ďaleko menej ako obyvateľov Bratislavy, kľudne prestrelujte.

5 Spočítajte, koľko rôznych súčtov môžeme na dvoch kockách hodiť.

- 6 Tvorte si dvojčky vyhovujúcich čísel. Rozmyslite si, že nevadí, ak nám malý počet čísel ostane osamote.
- 7 Tvorte si dvojčky vyhovujúcich čísel. Rozmyslite si, že nevadí, ak nám malý počet čísel ostane osamote.
- 8 Ak majú čísla navzájom rôzne zvyšky, je to v podstate predchádzajúca úloha. Čo ak niektoré dve čísla majú rovnaký zvyšok?
- 9 Rozdeľte si trojuholník strednými pričkami na štyri menšie trojuholníky.
- 10 Spočítajte, koľko rôznych škôd môže bača utrpieť v daný deň.
- 11 Rozdeľte štvorec na 100 vhodných trojuholníkov s obsahom  $1 \text{ cm}^2$ . (Např. pravouhlé sú fajn.)
- 12 Možných súčtov je 11 a  $34 > 3 \cdot 11$ .
- 13 Nie. Nájdite postupnosť hodov, pri ktorej sa to nestane.
- 14 Rozdeľte si štvorec na 9 menších štvorcov.
- 15 Pozrite sa na paritu súradníc. Koľkými spôsobmi môže byť nakombinovaná?
- 16 8, rozdeľte si šachovnicu na riadky.
- 17 Podelte si čísla do skupiniek tak, aby každá skupinka mala vlastnosť: keď z nej vyberieme hocikaké dve čísla, tak jedno delí druhé.  
Príkladom takej peknej skupinky je 3, 6, 12, 24, ...
- 18 14, rozdeľte si šachovnicu na uhlopriečky smerujúce jedným smerom. Je ich až 15? Neviete dve spojiť do jednej?
- 19 32, dajte ich na čierne políčka. Pre odhad si podelte šachovnicu do dvojíc políčok, ktoré sa navzájom ohrozujú.
- 20 Pokryte štvorec 25 kruhmi s polomerom  $1/7$ .  
Pri hľadaní pokrytia môže prísť vhod 6-uholníková sieť.
- 21 Uvedomte si, že na párty nemôže byť súčasne človek, čo nikoho nepozná, aj človek, čo pozná každého.
- 22 Príde vhod dodefinovať si  $F_0 = 0$ . Sledujte dvojicu posledných dvoch Fibonacciho čísel po delení  $n$ .
- 23 Rozdeľte si šachovnicu po stĺpcoch.
- 24 32, opäť si podelte políčka do dvojíc.
- 25 Rozdeľte si šachovnicu na 8 „uhlopriečok“ po 8 políčok – ak uhlopriečka narazí na stranu štvorca, tak pokračuje z druhej strany.
- 26 Pre jedného človeka existujú traja ľudia, ktorých všetkých (ne)pozná.
- 27 Ukážte, že spomedzi 5 čísel možno vybrať 3, ktorých súčet je deliteľný tromi.
- 28 18 nestačí, ak dáme figúrky na striedačku a hodíme jednotku. Ak pohybom figúrky o  $k$  nevieme nič vyhodíť, tak každej figúrke priradíme voľné políčko.
- 29 Nájdite prvočíslo, ktoré bude deliť nejaký člen postupnosti. Sledujte zvyšky.  
Dobрым kandidátom je prvočíslo 7.
- 30 Číslo  $2 \cdot 101$  zjavne môže byť vybrané, ale  $19 \cdot 47$  nie. Sledujte vhodné prvočísla.  
Pre každé z vybraných čísel zoberte najmenšie prvočíslo, ktoré ho delí.
- 31 Rozdeľte si množinu bodov na uliciach do najviac 11 400 útvarov.  
Zoberte si križovatku a do každého smeru 100 m ulice a pokryte takýmito útvarmi celý New York.

- 32** Pozrite sa na čísla  $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{48}$ . V programovaní sa postupnosť takýchto súčtov nazýva *prefixové súčty*. Áno, platí to aj pre 47 čísel.
- 33** Vid' ďalší hint.
- 34**     • Ako by ste napísali program, ktorý by našiel najdlhšiu rastúcu a klesajúcu podpostupnosť?
- Využite *dynamické programovanie*: pre každé číslo postupne určite dĺžku najdlhšej rastúcej podpostupnosti, ktorá sa končí v danom čísel. To isté spravte aj pre klesajúcu.
  - Pre každý člen ste si napísali dvojicu čísel. Čo musí pre tieto dvojice platiť? Čo by sa stalo, ak by najdlhšia rastúca a klesajúca postupnosť boli postupne dlhé najviac  $a, b$ ?
- 35** Uvažujte prefixové súčty  $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$  a ukážte, že existujú  $i$  a  $j$  také, že  $s_i = s_j + 21$ . Nevychádza dirichlet? Ako presne vyzerá taký prípad?
- 36** Dvojkrokový dirichlet. Zoberte si jedného človeka a pozrite sa na ľudí, s ktorými si píše o jednej téme.
- 37** Vyberte ľubovoľné dve podmnožiny s rovnakým súčtom a potom ich prerobte na disjunktné zachovávajúce súčet.
- 38** Spočítajte dvojice políčok, ktoré sú v rovnakom riadku a majú rôznu farbu. Vyberte dvojicu stĺpcov, kde je týchto dvojíc najviac.
- 39** Urobte dvojkrového dirichleta. Nájdite najprv dostatočne veľa štvorcov a z nich vyberte hľadanú štvrtú mocninu.
- 40** Ukážte, že jeden študent je v aspoň štyroch krúžkoch. Čo viete povedať o krúžkoch, v ktorých nie je?