

Dirichletov princíp

Letné sústreďenie KMS kategórie Beta, 10. – 17. 6. 2017, Bumbálka – Makov
Jozef Rajník

Dirichletov princíp. Ak máme n holubníkov a $n + 1$ holubov, tak v aspoň jednom holubníku musia byť aspoň dva holuby.

Zovšeobecnený dirichletov princíp. Ak máme n holubníkov a viac ako kn holubov, tak v aspoň jednom holubníku musí byť aspoň $k + 1$ holubov.

Plno ďalších úloh rôznych obtiažností aj s riešeniami nájdete na <http://mks.mff.cuni.cz/library/DirichletuvPrincipDS/DirichletuvPrincipDS.pdf>. Taktiež odporúčam Zbierku KMS kms.sk/zbierka.

Ľahké úlohy

Úloha 1. Dokážte, že z ľubovoľných štyroch celých čísel vieme vybrať dve čísla, ktorých rozdiel je deliteľný tromi.

Úloha 2. Dokážte, že medzi ľubovoľnými 12-timi rôznymi celými dvojčifernými číslami nájdeme dve, ktorých rozdiel je dvojčiferné číslo s oboma ciframi rovnakými.

Úloha 3. V štvorci s rozmermi $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ je zakreslených 101 bodov. Dokážte, že v ňom existuje trojuholník s obsahom 1 cm^2 , ktorý obsahuje aspoň dva z daných bodov.

Úloha 4. Dokážte, že vo štvorci s rozmermi $6\text{ cm} \times 6\text{ cm}$, kde je zakreslených 37 bodov, existuje štvorec $2\text{ cm} \times 2\text{ cm}$, ktorý obsahuje aspoň päť z daných bodov.

Úloha 5. V priestore máme 9 bodov s celočíselnými súradnicami. Dokážte, že existujú dva body, ktorých ťažisko má celočíselné súradnice.

Mierne ťažšie úlohy

Úloha 6. Na štvorcovom stole $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ sedí 151 múch. Dokážte, že hrncom s polomerom $1/7\text{ m}$ dokážeme zabiť sedem múch jednou ranou.

Úloha 7. Dokážte, že na každej párty sú dvaja ľudia, ktorí poznajú rovnako veľa ostatných ľudí z párty.

Úloha 8. Máme postupnosť 48 celých čísel. Dokážte, že z nej vieme vybrať súvislú podpostupnosť, ktorej súčet je deliteľný 47-mi. Platí to aj pre postupnosť 47 celých čísel?

Úloha 9. Pre Fibonacciho čísla platí $F_1 = F_2 = 1$ a $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ pre všetky prirodzené čísla k . Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n existuje Fibonacciho číslo, ktoré sa končí na n núl.

Úloha 10. Na šachovnici 8×8 je rozmiestnených 25 veží. Dokážte, že z nich vieme vybrať 4 tak, aby sa žiadne dve z nich neohrozovali. [KMS 15/16, 3. zimná séria, úloha 5]

Úloha 11. Dokážte, že medzi ľubovoľnými ôsmimi zloženými prirodzenými číslami menšími ako 361 existujú vždy dve čísla, ktoré majú spoločného deliteľa.

Úloha 12. Nájdite čo najdlhšiu aritmetickú postupnosť prirodzených čísel s diferenciou 60, ktorá je tvorená samými prvočíslami.

Úloha 13. Dokážte, že medzi 6-timi ľuďmi vždy existujú traja takí ľudia, že každý pozná každého alebo nikto nepozná nikoho.

Úloha 14. Pre jedného človeka existujú traja ľudia, ktorých všetkých (ne)pozná.

Úloha 15. V rovine je daných 13 bodov s celočíselnými súradnicami. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať tri body, ktorých ťažisko má celočíselné súradnice.

Úloha 16 (PraSe 2000/01, 3. séria, úloha 3). Mesto New York sa skladá zo 151 severojužných a 151 východozápadných ulíc, ktoré tvoria pravidelnú štvorčekovú sieť o hrane 100 metrov (šírku ulíc zanedbávame). V uliciach mesta je 11 401 telefónnych búdok. Ukážte, že existuje dvojica telefónnych búdok vzdialená najviac 200 metrov chôdze po ulici.

Ťažké úlohy

Úloha 17 (PraSe 2000/01, 3. séria, úloha 4). Šachista Dominik sa chystá na dôležitý turnaj. Na tréning má 76 dní a každý deň chce zahrať aspoň jednu partiu, celkom však nie viac než 132. Dokážte, že v niekoľkých po sebe idúcich dňoch, odohral presne 21 partíí.

Úloha 18 (IMO 1964, úloha 1). 17 ľudí si píše maily každý s každým. Každá dvojica diskutuje práve o jednej z troch tém. Ukážte, že existujú tri osoby, ktoré diskutujú o tej istej téme.

Úloha 19 (IMO 1972, úloha 1). Máme 10 dvojčiferných čísel. Dokážte, že z nich vieme vybrať dve disjunktné množiny s rovnakým súčtom.

Úloha 20 (Rusko 2000). Tabuľka 100×100 je rozdelená na jednotkové štvorčeky, ktoré sú zafarbené štyrmi farbami tak, že v každom stĺpci a v každom riadku je z každej farby 25 políčok. Dokážte, že existujú dva riadky a dva stĺpce také, že štyri políčka na ich prieniku majú rôzne farby.

Úloha 21. Máme za sebou v nejakom poradí napísané čísla $1, 2, \dots, 101$. Dokážte, že z nich vieme vyškrtnúť 90 z nich tak, aby zvyšných 11 čísel tvorilo rastúcu alebo klesajúcu postupnosť.

Úloha 22 (Erdősova-Szekeresova veta, 1935). Máme ľubovoľnú postupnosť $ab + 1$ rôznych čísel. Dokážte, že existuje jej rastúca podpostupnosť obsahujúca aspoň $a + 1$ členov alebo jej klesajúca podpostupnosť obsahujúca aspoň $b + 1$ členov.

Úloha 23 (IMO 1985, úloha 4). Máme daných 1985 kladných celých čísel takých, že žiadne z nich nemá prvočíselného deliteľa väčšieho ako 23. Dokážte, že medzi nimi existujú 4 čísla, ktorých súčin je štvrtou mocninou celého čísla.

Úloha 24 (Tournament of towns 1985). V Bumbálke je 32 študentov, ktorí sú zoskupení v 33 tajných matematických krúžkoch. Každý krúžok pozostáva z troch študentov a žiadne dva krúžky nemajú rovnaké zloženie. Dokážte, že existujú dva krúžky, ktoré majú práve jedného spoločného študenta.

Hinty k niektorým úlohám

8 Pozrite sa na čísla $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{48}$. Áno, platí to aj pre 47 čísel.

15 Ukážte, že spomedzi 5 čísel možno vybrať 3, ktorých súčet je deliteľný tromi.

16 Zoberte si križovatku a do každého smeru 100 m ulice a pokryte takýmito útvarmi celý New York.

17 Uvažujte prefixové súčty $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ a ukážte, že existujú i a j také, že $s_i = s_j + 21$. Nevychádza dirichlet? Ako presne vyzerá taký prípad?

18 Dvojkrovový dirichlet. Zoberte si jedného človeka a pozrite sa na ľudí, s ktorými si píše o jednej téme.

19 Vyberte ľubovoľné dve podmnožiny s rovnakým súčtom a potom ich prerobte na disjunktné zachovajúc súčet.

20 Spočítajte dvojice políčok, ktoré sú v rovnakom riadku a majú rôznu farbu. Vyberte dvojicu stĺpcov, kde je týchto dvojíc najviac.

21 Vid' ďalší hint.

22 Prirad'te každému členovi postupnosti dvojicu (r_i, k_i) , kde r_i (k_i) je dĺžka najdlhšej rastúcej (klesajúcej) postupnosti končiacej daným členom. Môžu byť dve takéto dvojice rovnaké?

23 Urobte dvojkrovového dirichleta. Nájdite najprv dostatočne veľa štvorcov a z nich vyberte hľadanú štvrtú mocninu.

24 Ukážte, že jeden študent je v aspoň štyroch krúžkoch. Čo viete povedať o krúžkoch, v ktorých nie je?