

Dirichletov princíp

Jozef Rajník, Letná škola Trojstenu 15. – 26. 7. 2024

Veta 1 (Dirichletov princíp). Ak máme viac hľubov ako holubníkov, tak v aspoň jednom holubníku musia byť aspoň dva holuby.

Veta 2 (Dirichletov princíp – frekvenčná forma). Ak máme n holubníkov a viac ako kn hľubov, tak v aspoň jednom holubníku musí byť aspoň $k + 1$ hľubov.

Jednoduché aplikácie Dirichletovho princípu

- **Úloha 1.** Dokážte, že z ľubovoľných štyroch celých čísel vieme vybrať dve čísla, ktorých rozdiel je deliteľný tromi.
- Úloha 2.** Dokážte, že z ľubovoľných $n + 1$ celých čísel možno vybrať dve, ktorých rozdiel je deliteľný číslom n .
- Úloha 3.** Dokážte, že medzi ľubovoľnými 12-timi rôznymi celými dvojčifernými číslami nájdeme dve, ktorých rozdiel je dvojčiferné číslo s oboma ciframi rovnakými.
- Úloha 4.** Dokážte, že v Bratislave žijú dvaja ľudia, ktorý sa narodili v rovnaký deň toho istého roku. Viete nájsť mesto alebo štát, v ktorom to nemusí platiť?
- Úloha 5.** Dokážte, že ak hodíme 12-krát dvomi hracími kockami, tak zaručene existuje súčet, ktorý sme hodili v aspoň dvoch hodoch.
- **Úloha 6.** Spomedzi čísel $1, 2, \dots, 100$ vyberieme ľubovoľných 52 čísel. Dokážte, že zakaždým možno spomedzi nich vybrať dve čísla, ktorých súčet je deliteľný stami.
- Úloha 7.** Dokážte, že spomedzi ľubovoľných 52 celých čísel možno zakaždým vybrať dve čísla, ktorých súčet alebo rozdiel je deliteľný stami.
- Úloha 8.** Spomedzi čísel $1, 2, \dots, 42$ vyberieme 22 čísel. Dokážte, že sme zaručene vybrali dve čísla, ktoré sa líšia práve o 1.
- **Úloha 9.** Vo vnútri rovnostranného trojuholníka o strane dĺžky 2 sa nachádza päť bodov. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dvojicu bodov, ktoré sú od seba vo vzdialenosti nanajvýš 1.
- Úloha 10.** Vlk zje každý deň aspoň jednu ovcu, no najviac tri ovce. Medveď zje každý deň aspoň štyri ovce, no najviac sedem oviec. Dokážte, že v každom týždni existujú dva dni, keď bača utrpí rovnakú škodu (teda príde o rovnaký počet oviec).
- Úloha 11** ([1]). V štvorci s rozmermi $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ je zakreslených 101 bodov. Dokážte, že v ňom existuje trojuholník s obsahom 1 cm^2 , ktorý obsahuje aspoň dva z daných bodov.

Dirichletov princíp: frekvenčná forma

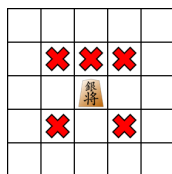
- **Úloha 12.** Dokážte, že ak hodíme 34-krát dvomi hracími kockami, tak zaručene bude existovať súčet, ktorý sme hodili aspoň štyrikrát.
- **Úloha 13** (PraSe 94/95, [1]). Dokážte, že vo štvorci s rozmermi $6\text{ cm} \times 6\text{ cm}$, kde je zakreslených 37 bodov, existuje štvorec $2\text{ cm} \times 2\text{ cm}$, ktorý obsahuje aspoň päť z daných bodov.
- Úloha 14.** V priestore máme 9 bodov s celočíselnými súradnicami. Dokážte, že existujú dva body, ktorých ťažisko má celočíselné súradnice.

Optimalizačné úlohy

- **Úloha 15.** Koľko najviac veží možno umiestniť na šachovnicu tak, aby sa žiadne dve neohrozovali?
- **Úloha 16.** Koľko najviac strelcov možno umiestniť na šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?
- **Úloha 17.** Koľko najmenej čísel musíme vybrať z množiny $\{1, \dots, 20\}$, aby medzi vybranými číslami zaručene existovali dve, z ktorých jedno delí to druhé?
- Úloha 18.** Koľko najviac jazdcov možno umiestniť na šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Mix rôznych úloh na precvičenie

- Úloha 19.** Dokážte, že na každej párty sú dvaja ľudia, ktorí poznajú rovnako veľa ostatných ľudí z párty.
- Úloha 20.** Dokážte, že medzi 6-timi ľuďmi vždy existujú traja takí ľudia, že každý pozná každého alebo nikto nepozná nikoho.
- Úloha 21.** Na šachovnici 8×8 je rozmiestnených 17 strelcov. Dokážte, že zakaždým vieme spomedzi nich vybrať troch strelcov tak, aby sa navzájom neohrozovali, a to ani potom, čo nevybraných strelcov dáme preč.
- Úloha 22** ([1]). Na štvorcovom stole $1\text{m} \times 1\text{m}$ sedí 151 múch. Dokážte, že hrncom s polomerom $1/7\text{ m}$ dokážeme zabiť sedem múch jednou ranou.
- Úloha 23** (KMS 20/21-Z3-5). Figúrka *strieborný generál* (pochádza z japonského šachu) ohrozuje štyri políčka, s ktorými má spoločný iba roh a jedno políčko priamo pred sebou (ako na obrázku 1). Figúrku možno otáčať do 4 smerov, pričom figúrka má vyznačené, na ktorej strane má predok (je tam zúžená). Najviac koľko strieborných generálov možno umiestniť na šachovnicu rozmerov 8×8 tak, aby žiaden strieborný generál neohrozoval iného?



Obr. 1: Políčka, ktoré ohrozuje strieborný generál.

- Úloha 24** (KMS 10/11-3L-7). Vedúci KMS radi klebetia a každý z nich pozná niekoľko klebiet. Každí dvaja vedúci poznajú aspoň jednu rovnakú klebetu. Navyše žiadni dvaja nepoznajú presne tie isté klebety (aj v prípade, že Kubko pozná len klebetu A a Maťko klebety A a B , hovoríme, že poznajú iné klebety). Koľko najviac vedúcich môže mať KMS, ak všetci dokopy poznajú práve 6 rôznych klebiet?
- Úloha 25.** Vedúci KMS radi klebetia a každý z nich pozná niekoľko klebiet. Všetci dokopy poznajú 5 klebiet. Opäť žiadni dvaja nepoznajú presne tie isté klebety. Koľko najmenej vedúcich musí obsahovať KMS, aby zaručene existovali dvaja vedúci taký, že jeden vedúci pozná všetky klebety druhého vedúceho?
- Úloha 26** (KMS 18/19-Z1-6). Figúrka *povýšený strelec* ohrozuje políčka, ktoré sa nachádzajú v rovnakej uhlopriečke (ako strelec v bežnom šachu) a navyše aj políčka, ktoré majú spoločnú hranu s políčkom, na ktorom povýšený strelec stojí. Koľko najviac povýšených strelcov možno umiestniť na šachovnicu rozmerov 9×9 tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali? A koľkých na šachovnicu $n \times n$?
- Úloha 27** (KMS 15/16-Z3-5, upravené). Koľko najmenej veží musíme umiestniť na šachovnicu rozmerov 8×8 , aby sme z nich vedeli vybrať 4 veže, z ktorých sa žiadne dve neohrozuju, a to ani potom, čo nevybrané veže dáme preč.
- Úloha 28.** V rovine je daných 13 bodov s celočíselnými súradnicami. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať tri body, ktorých ťažisko má celočíselné súradnice.

Úloha 29 (PraSe 00/01, [1]). Hrací plán hry „Človeče, nezlob sa!“ pozostáva z 36 políčok umiestnených do kruhu. Nájdite najmenšie také celé číslo n , že pri ľubovoľnom rozmiestnení n čísel a ľubovoľnom hode kockou vieme pohybom nejakej figúrky vyhodit' inú.

Úloha 30 (PraSe 98/99-1-1, [1]). Nájdite čo najdlhšiu aritmetickú postupnosť prirodzených čísel s diferenciou 60, ktorá je tvorená samými prvočíslami.

Úloha 31 (PraSe 2000/01-3-3, [1]). Mesto New York sa skladá zo 151 severojužných a 151 východozápadných ulíc, ktoré tvoria pravidelnú štvorčekovú sieť s hranou malého štvorčeka 100 metrov (šírku ulíc zanedbávame). V uliciach mesta je 11 401 telefónnych búdok. Ukážte, že existuje dvojica telefónnych búdok vzdialená najviac 200 metrov chôdze po ulici.

Úloha 32 (IMO 1964, úloha 1). 17 ľudí si píše maily každý s každým. Každá dvojica diskutuje práve o jednej z troch tém. Ukážte, že existujú tri osoby, ktoré diskutujú o tej istej téme.

→ **Úloha 33.** Pre Fibonacciho čísla platí $F_1 = F_2 = 1$ a $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ pre všetky prirodzené čísla k . Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n existuje Fibonacciho číslo, ktoré sa končí na n núl.

→ **Úloha 34.** Máme postupnosť 48 celých čísel. Dokážte, že z nej vieme vybrať súvislú podpostupnosť, ktorej súčet je deliteľný 47-mi. Platí to aj pre postupnosť 47 celých čísel?

→ **Úloha 35** (MEMO 2023 T3). Nájdite najmenšie celé číslo b s nasledujúcou vlastnosťou: Pre každé ofarbenie práve b políčok na šachovnici rozmerov 8×8 na zeleno je možné umiestniť 7 strelcov na 7 zelených políčok tak, aby sa žiadni dvaja strelci neohrozovali.

Úloha 36 (PraSe 2000/01, 3. séria, úloha 4). Šachista Dominik sa chystá na dôležitý turnaj. Na tréning má 76 dní a každý deň chce zahrať aspoň jednu partiu, celkom však nie viac než 132. Dokážte, že v niekoľkých po sebe idúcich dňoch, odohral presne 21 partíí.

Úloha 37 (IMO 1985, úloha 4). Máme daných 1985 kladných celých čísel takých, že žiadne z nich nemá prvočíselného deliteľa väčšieho ako 23. Dokážte, že medzi nimi existujú 4 čísla, ktorých súčin je štvrtou mocninou celého čísla.

Literatúra

[1] Dávid Stanovský, Dirichletov princíp, dostupné na <https://prase.cz/library/DirichletuvPrincipDS/DirichletuvPrincipDS.pdf>

Plno ďalších úloh rôznych obtiažností aj s riešeniami nájdete na <http://mks.mff.cuni.cz/library/DirichletuvPrincipDS/DirichletuvPrincipDS.pdf>. Taktiež odporúčam Zbierku KMS kms.sk/zbierka.

Dávam tiež do pozornosti online prednášku, ktorá obsahuje aj riešené náročnejšie úlohy: <https://www.youtube.com/watch?v=JYDVFxYEMSO>

Ako hľadať dôkazy cez Dirichletov princíp

Najviac priamočiare použitie Dirichletovho princípu vyzerá zhruba takto:

1. Prečítame si zadanie a zistíme, koľko prvkov máme nájsť a s akou vlastnosťou. Prvky budú naše holuby.
2. Odhadneme, koľko holubníkov chceme mať.
3. Pokiaľ v zadaní vyberáme niekoľko prvkov z nejakej množiny A (čísla, políčka zo šachovnice), rozdelíme množinu A na m holubníkov. Pre každý z nich musí platiť, že ľubovoľné dva prvky z neho musia mať hľadanú vlastnosť. Rozdelenie hľadáme skúšaním, kreslením, ako by to mohlo vyzerieť, čo by množiny mohli obsahovať.
4. Spíšeme dôkaz.

Samozrejme, sú úlohy, napr. úloha ??, v ktorých treba použiť Dirichletov princíp viac sofistikovane a na prvý pohľad nie je jasné, čo budú holuby a čo holubníky.

Riešenie úlohy 17

Rozložme si množinu $A = \{1, 2, \dots, 20\}$ nasledovne:

$$A_1 = \{1, 2, 4, 8, 16\},$$

$$A_2 = \{3, 6, 12\},$$

$$A_3 = \{5, 10, 20\},$$

$$A_4 = \{7, 14\},$$

$$A_5 = \{9, 18\},$$

$$A_6 = \{11\},$$

$$A_7 = \{13\},$$

$$A_8 = \{15\},$$

$$A_9 = \{17\},$$

$$A_{10} = \{19\}.$$

Vidíme, že ak z ľubovoľnej množiny A_i vyberieme dva prvky, tak jeden bude deliť druhý. Keďže z množiny A vyberáme 11 čísel, ale máme iba 10 množín, tak z Dirichletovho princípu musíme vybrať dve čísla a, b z tej istej množiny A_i . Vďaka našej voľbe množín A_i pre tieto dve čísla a, b platí, že jedno delí druhé. Tým sme dokázali, čo sme mali.

Pri riešení sme mohli povedať „Vidíme“, lebo množín a ich prvkov je málo a ide o konkrétne množiny. Túto vlastnosť teda vieme skontrolovať pohľadom. Pri väčších (teda aj nekonečných) množinách by sme mali takúto vlastnosť dokázať.

Hinty k niektorým úlohám

- 1 Možné zvyšky sú len tri a máme štyri čísla.
- 2 Možných zvyškov je len n a máme $n + 1$ čísel.
- 3 Čím je deliteľné dvojciferné číslo s oboma ciframi rovnakými?
- 4 Spočítajte, koľko je rôznych možných dátumov narodenia. Je ich ďaleko menej ako obyvateľov Bratislavy, kľudne prestrelujte.
- 5 Spočítajte, koľko rôznych súčtov môžeme na dvoch kockách hodiť.
- 6 Tvorte si dvojčky vyhovujúcich čísel. Rozmyslite si, že nevadí, ak nám malý počet čísel ostane osamote.
- 7 Tvorte si dvojčky vyhovujúcich čísel. Rozmyslite si, že nevadí, ak nám malý počet čísel ostane osamote.

- 8 Ak majú čísla navzájom rôzne zvyšky, je to v podstate predchádzajúca úloha. Čo ak niektoré dve čísla majú rovnaký zvyšok?
- 9 Rozdeľte si trojuholník strednými priečkami na štyri menšie trojuholníky.
- 10 Spočítajte, koľko rôznych škôd môže bača utrpieť v daný deň.
- 11 Rozdeľte štvorec na 100 vhodných trojuholníkov s obsahom 1 cm^2 . (Např. pravouhlé sú fajn.)
- 12 Možných súčtov je 11 a $34 > 3 \cdot 11$.
- 13 Rozdeľte si štvorec na 9 menších štvorcov.
- 14 Pozrite sa na paritu súradníc. Koľkými spôsobmi môže byť nakombinovaná?
- 15 8, rozdeľte si šachovnicu na riadky.
- 16 14, rozdeľte si šachovnicu na uhlopriečky smerujúce jedným smerom. Je ich až 15? Neviete dve spojiť do jednej?
- 17 Každému číslu priradte jeho najväčšieho nepárneho deliteľa.
- 18 32, dajte ich na čierne políčka. Pre odhad si podelte šachovnicu do dvojíc políčok, ktoré sa navzájom ohrozujú.
- 19 Uvedomte si, že na párty nemôže byť súčasne človek, čo nikoho nepozná, aj človek, čo pozná každého.
- 20 Pre jedného človeka existujú traja ľudia, ktorých všetkých (ne)pozná.
- 21 Rozdeľte si šachovnicu po stĺpcoch.
- 22 Pokryte štvorec 25 kruhmi s polomerom $1/7$.
Pri hľadaní pokrytia môže prísť vhod 6-uholníková sieť.
- 23 32, opäť si podelte políčka do dvojíc.
- 24 $2^5 = 32$. Všetci vedúci poznajú tú istú klebetu. Prečo viac nejde? Každú podmnožinu klebiet spárujte s jej doplnkom.
- 25 $11 (= \binom{5}{2} + 1)$. Môžeme mať 10 vedúcich, kde každý pozná len dve klebety. Všetky možné množiny klebiet zoradte do 10 radov, tak, aby v každom rade postupne vždy pribúdala jedna nová klebeta.
- 27 25. Rozdeľte si šachovnicu na 8 „uhlopriečok“ po 8 políčok – ak uhlopriečka narazí na stranu štvorca, tak pokračuje z druhej strany.
- 28 Ukážte, že spomedzi 5 čísel možno vybrať 3, ktorých súčet je deliteľný tromi.
- 29 18 nestačí, ak dáme figúrky na striedačku a hodíme jednotku. Ak pohybom figúrky o k nevieme nič vyhodiť, tak každej figúrke priradíme voľné políčko.
- 30 Nájdite prvočíslo, ktoré bude deliť nejaký člen postupnosti. Sledujte zvyšky.
Dobрым kandidátom je prvočíslo 7.

- 31** Rozdeľte si množinu bodov na uliciach do najviac 11 400 útvarov. Zoberte si križovatku a do každého smeru 100 m ulice a pokryte takýmito útvarmi celý New York.
- 32** Dvojkrovový dirichlet. Zoberte si jedného človeka a pozrite sa na ľudí, s ktorými si píše o jednej téme.
- 33** Príde vhod dodefinovať si $F_0 = 0$. Sledujte dvojicu posledných dvoch Fibonacciho čísel po delení n .
- 34** Pozrite sa na čísla $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{48}$. V programovaní sa postupnosť takýchto súčtov nazýva *prefixové súčty*. Áno, platí to aj pre 47 čísel.
- 36** Uvažujte prefixové súčty $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ a ukážte, že existujú i a j také, že $s_i = s_j + 21$. Nevychádza dirichlet? Ako presne vyzerá taký prípad?
- 37** Urobte dvojkrovového dirichleta. Nájdite najprv dostatočne veľa štvorcov a z nich vyberte hľadanú štvrtú mocninu.