

Dirichletov princíp

Jozef Rajník

Dirichletov princíp. Ak máme n holubníkov a $n + 1$ holubov, tak v aspoň jednom holubníku musia musia byť aspoň dva holuby.

Zovšeobecnený dirichletov princíp. Ak máme n holubníkov a viac ako kn holubov, tak v aspoň jednom holubníku musí byť aspoň $k + 1$ holubov.

Dôkaz. Ukážeme si dôkaz rovno zovšeobecného dirichletovho princípu, a to dôkaz sporom. Predpokladajme, že v každom holubníku je najviac k holubov. Potom v n holubníkov môže byť najviac kn holubov. Avšak my máme holubov viac ako kn , čo je spor.

Za dirichletovým princípom sa skrýva jednoduché, intuitívne tvrdenie. Možno ho použiť v mnohých kombinatorických úlohách, kde máme dokazovať existenciu niečoho. Avšak jeho cielené použitie uľahčí riešenie mnohých takýchto úloh. Ak si povieme, že ním ideme riešiť úlohu, stačí nám zvoliť si správne holubníky a holubov.

Úloha 1. Dokážte, že z ľubovoľných štyroch celých čísel vieme vybrať dve čísla, ktorých rozdiel je deliteľný tromi.

Úloha 2. Dokážte, že medzi ľubovoľnými 12-timi rôznymi celými dvojčifernými číslami nájdeme dve, ktorých rozdiel je dvojčiferné číslo s oboma ciframi rovnakými.

Úloha 3. Máme postupnosť 48 celých čísel. Dokážte, že z nej vieme vybrať súvislú podpostupnosť, ktorej súčet je deliteľný 47-mi. Platí to aj pre postupnosť 47 celých čísel?

Úloha 4. V štvorci s rozmermi $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ je zakreslených 101 bodov. Dokážte, že v ňom existuje trojuholník s obsahom 1 cm^2 , ktorý obsahuje aspoň dva z daných bodov.

Úloha 5. Na šachovnici 8×8 je rozmiestnených 25 veží. Dokážte, že z nich vieme vybrať 4 tak, aby sa žiadne dve z nich neohrozovali. [KMS 15/16, 3. zimná séria, úloha 5]

Úloha 6. Dokážte, že medzi ľubovoľnými ôsmimi zloženými prirodzenými číslami menšími ako 361 existujú vždy dve čísla, ktoré majú spoločného deliteľa.

Úloha 7. Máme za sebou v nejakom poradí napísané čísla $1, 2, \dots, 101$. Dokážte, že z nich vieme vyškrtnúť 90 z nich tak, aby zvyšných 11 čísel tvorilo rastúcu alebo klesajúcu postupnosť.

Plno ďalších úloh rôznych obtiažností aj s riešeniami nájdete na <http://mks.mff.cuni.cz/library/DirichletuvPrincip>, [DirichletuvPrincipDS.pdf](#).