

Farbenia

Jozef Rajník, 24. 2. 2017

Úloha 1. Na obvode kruhu sú napísané za sebou čísla 1, 0, 1, 0, 0, 0. V jednom kroku môžeme dve susedné čísla zväčšiť o 1. Môžeme po niekoľkých krokoch dostať na obvode kruhu všetky čísla rovnaké?

Riešenie. Zafarbíme si každé druhé číslo na kruhu načierno a zvyšné políčka na bielo. Počiatočné dve jednotky sú na políčkach s rovnakou farbou, povedzme na čiernych. Súčet čísel na čiernych políčkach je 2, na bielych 0. Naša operácia zvyšuje o 1 jedno biele a jedno čierne políčko. Preto nemení rozdiel súčtu čísel na čiernych a bielych políčkach. Ten je na začiatku 2, preto nevime dostať všetky čísla rovnaké, kde je ten rozdiel 0.

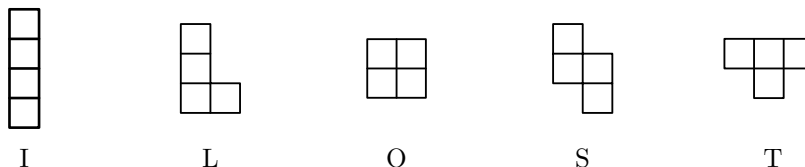
Táto úloha a aj nasledovné ilustrujú to, ako vie pomôcť „ofarbenie“ políčok, príp. iných vecí. Aj šachovnica nie je čierno-biela len tak pre nič za nič. Uľahčuje to prehľad na nej. Takisto aj rôzne farbenia (netreba sa obmedzovať len na šachovnicovitú) nám uľahčia náhľad na úlohu. Môžeme jednoduchým spočítaním ukázať, že niečo nejde, lebo nesedia počty; nájsť invariant (ako v úlohe 1) alebo iné užitočné veci.

Úloha 2. Máme šachovnicu (8×8), z ktorej sú odrezané

- a) dva priľahlé rohy.
- b) dva protíľahlé rohy,

Možno takúto šachovnicu vydláždiť dominami 2×1 ?

Úloha 3. Je možné pomocou piatich tetramín, jedného z každého druhu, vytvoriť obdĺžnik?



Obr. 1: Tetrominá a ich označenia

Úloha 4. Máme k dispozícii 15 tetromín v tvare T a 1 tetromino v tvare O. Možno pomocou nich vydláždiť šachovnicu 8×8 ?

Úloha 5. Je možné pokryť obdĺžnik 10×10 pomocou tetramín I?

Úloha 6. Na stole je rozložených v rade $2n$ kariet. Na každej karte je zhora napísané jedno prirodzené číslo. Martin a Michal hrajú s nimi nasledovnú hru. Martin začína a následne sa s Michalom striedajú v ťahoch. V jednom ťahu si hráč na ťahu zoberie k sebe jednu kartu z kraja. Hra skončí, keď sa minú všetky karty na stole. Na konci hry si každý hráč spočíta svoje skóre: súčet čísel na kartách, ktoré so hráč zobral. Hráč s vyšším skóre vyhráva. V závislosti od prirodzeného čísla n určte, ktorý z hráčov má víťaznú, resp. neprehrávajúcu stratégiu. [KMS 11/12, 3. zimná séria, 7]

Úloha 7. Na každom políčku tabuľky $n \times n$ sa nachádza zhasnutá lampa. V jednom ťahu si môžeme vybrať v riadku alebo stĺpci m po sebe idúcich lúčok a zmeniť stav týchto lúčok (zo zapnutej na vypnutú a naopak). Dokážte, že stav, v ktorom sú všetky lampy zapnuté, vieme dosiahnuť práve vtedy, keď číslo m je deliteľom čísla n . [KMS 15/16, 2. zimná séria, 7]

Úloha 8. Máme šachovnicu 7×7 (tie rozmerov 8×8 sa už minuli). Chceme ju vydláždiť pomocou l triomín v tvare L a s tetramín v tvare S . Nájdite všetky počty l a s pre ktoré je možné šachovnicu vydláždiť. [KMS 14/15, 2. zimná séria, 9]



Obr. 2: L-triomino