

Úlohy z teórie grafov

Jozef Rajník

Úloha 1. Nech G je taký graf, v ktorom každý vrchol má stupeň aspoň 3. Dokážte, že graf G obsahuje cyklus párnej dĺžky.

Úloha 2 (Rusko, 2001). Na párty je $2n + 1$ ľudí. Vieme, že ak si vyberieme skupinu ľubovoľných n ľudí, tak existuje mimo tejto skupiny účastník párty, ktorý pozná všetkých ľudí z tejto skupiny. Dokážte, že na párty je účastník, ktorý pozná všetkých účastníkov párty.

Úloha 3 (OMM 2009). Na párty je n osôb. Vieme, že medzi ľubovoľných štyroch osôb existujú tri osoby, ktoré poznajú každá s každou alebo existujú tri osoby, medzi ktorými sa žiadne dve nepoznajú. Dokážte, že ich vieme rozdeliť na dve skupiny, kde v jedenej skupine sa budú všetci poznať a v druhej skupine sa nikto nebude poznať.

Úloha 4. Koľko najviac hrán môže obsahovať graf na n vrchoch, ktorý neobsahuje trojuholník?

Úloha 5. V skupine $n > 6$ detí má každé dieťa práve troch kamarátov (kamarátsvo je vzájomné). Dokážte, že deti možno rozdeliť na dve neprázdne skupiny tak, že každé dieťa v skupine má v nej aspoň dvoch svojich kamarátov.

Úloha 6 (KMS 06/07, 1. zimná séria, úloha 11). Na ostrove žije n domorodcov. jedného dňa náčelník rozhodol, že všetci (vrátane neho) si urobia a budú nosiť náhrdelník zložený z 0 alebo viac jednofarebných kamienkov. Dvaja domorodci majú mať aspoň jeden kameň rovnakej farby práve vtedy, keď sú priatelia.

a) Dokážte, že domorodci môžu splniť náčelníkov rozkaz.

b) Aký je minimálny počet farieb kamienkov potrebný na to, aby sa dal splniť náčelníkov rozkaz bez ohľadu na priateľské vzťahy na ostrove?