

Úloha 1. Pre ktoré dvojice prirodzených čísel n, k existuje graf s n vrcholmi, ktorého každý vrchol má stupeň k ?

Úloha 2. Dokážte, že každý netriviálny graf má dva vrcholy rovnakého stupňa.

Úloha 3. Dokážte, že v súvislom grafe majú každé dve najdlhšie cesty spoločný vrchol.

Úloha 4. Dokážte, že ak má graf práve dva vrcholy nepárneho stupňa, tak sú tie vrcholy spojené cestou.

Úloha 5. Na sústreďení je $n > 6$ účastníkov a každý si zatancoval Tučňáka s práve tromi ďalšími účastníkmi (bohužiaľ, tancovali len vo dvojici). Dokážte, že účastníkov možno rozdeliť na dve skupiny tak, že každý člen skupiny má v nej aspoň dvoch svojich kamarátov, s ktorými tancoval Tučňáka.

Úloha 6. V mriežke $n \times n$ je vyznačených $2n$ bodov. Dokážte, že pre nejaké celé $k > 1$ môžeme vybrať $2k$ rôznych vyznačených bodov $a_1, a_2, \dots, a_{2k}$ tak, aby a_1 a a_2 sú v rovnakom riadku, a_2 a a_3 sú v rovnakom stĺpci, $\dots$, a_{2k-1} a a_{2k} sú v rovnakom riadku a a_{2k} a a_1 sú v rovnakom stĺpci. [IMC 1999, úloha 5]

Úloha 7. In a party, there are $2n + 1$ people. It's well known that for every group of n people, there exist a person(out of the group) who knows all them(the n people of the group). Show that there exist a person who knows all the people in the party. [Rusko, 2001, roč. 9, úloha 6]

Úloha 8. Šialený vedec zostrojil armádu robotov. Problém je v tom, že niektoré dvojice robotov sa nenávidia (nenávisť je vzájomná). Vždy však s robotmi vie urobiť jednu z nasledujúcich dvoch operácií:

- Ak nejaký robot nenávidí nepárny počet robotov, vedec ho môže zničiť.
- Vedec môže zdvojnásobiť armádu tak, že každý robot R sa rozdelí na dvoch robotov R_1 a R_2 . Pre každú dvojicu pôvodných robotov R, Q , ktorí sa nenávideli, sa budú nenávidieť aj roboti R_1 a Q_1 , aj roboti R_2 a Q_2 . Roboti R_1 a R_2 sa tiež nenávidia pre každého pôvodného robota R . To sú všetky dvojice robotov, ktoré sa budú nenávidieť po zdvojnásobení.

Dokážte, že vedec vie po konečnom počte operácií dostať armádu robotov, v ktorej neexistuje dvojica robotov, ktorá sa nenávidí. [Výberové sústredenie 2013/14]