

Teória grafov

Jozef Rajník, KMS letné sústredenie BETA 11. – 18. 6. 2022

Úloha 1 (KMS 17/18-1L-7). Ježiško má pripravených m rôznych darčiekov, z každého jeden kus. Na svete je n detí ($n \leq m$). Pre kladné celé číslo $i \leq n$, i -te dieťa má z Ježiškových m darčiekov vyhladených d_i darčiekov, po ktorých túži ($1 \leq d_i \leq m$). Ježiško vie, že platí

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_n} \leq 1.$$

Dokážte, že Ježiško môže rozdať deťom po jednom darčeku tak, aby každé dieťa dostalo darček, po ktorom túži.

Úloha 2 (KMS 05/06-Z3-5). Dokážte, že vrcholy každého grafu G , ktorého minimálny stupeň je aspoň 1, možno rozdeliť na dve skupiny tak, že každý vrchol má suseda v druhej skupine ako je on sám.

Úloha 3. Doážte, že graf, ktorého každý vrchol má stupeň aspoň 3, obsahuje kružnicu párnej dĺžky. Musí obsahovať aj kružnicu nepárnej dĺžky?

Úloha 4. V skupine $n > 6$ detí má každé dieťa práve troch kamarátov (kamarátsvo je vzájomné). Dokážte, že deti možno rozdeliť na dve neprázdne skupiny tak, že každé dieťa v skupine má v nej aspoň dvoch svojich kamarátov.

Úloha 5 (Rusko, 2001). Na párty je $2n + 1$ ľudí. Vieme, že ak si vyberieme skupinu ľubovoľných n ľudí, tak existuje mimo tejto skupiny účastník párty, ktorý pozná všetkých ľudí z tejto skupiny. Dokážte, že na párty je účastník, ktorý pozná všetkých účastníkov párty.

Úloha 6 (KMS 2017/18-L1-10). V KMS je niekoľko vedúcich a niektoré dvojice sa spolu kamarátia. Namiesto toho, aby si užívali pokojné Vianočné sviatky, sa radšej hádajú, či je krajšia fialová alebo modrá farba. Na začiatku si každý vedúci myslí, že krajšia je fialová. Občas sa stane, že jeden vedúci zorganizuje stretnutie a pozve naň všetkých svojich kamarátov. Po tomto stretnutí sa všetkým zúčastneným vedúcim zmení názor. Je možné, že po niekoľkých stretnutiach si budú všetci vedúci myslieť, že je krajšia modrá? (Bez ohľadu na to, ako sa vedúci kamarátia.)

Úloha 7 (KMS 06/07, 1. zimná séria, úloha 11). Na ostrove žije n domorodcov. jedného dňa náčelník rozhodol, že všetci (vrátane neho) si urobia a budú nosiť náhrdelník zložený z 0 alebo viac jednofarebných kamienkov. Dvaja domorodci majú mať aspoň jeden kamienok rovnakej farby práve vtedy, keď sú priatelia.

a) Dokážte, že domorodci môžu splniť náčelníkov rozkaz.

b) Aký je minimálny počet farieb kamienkov potrebný na to, aby sa dal splniť náčelníkov rozkaz bez ohľadu na priateľské vzťahy na ostrove?

Úloha 8 (OMM 2009). Na párty je n osôb. Vieme, že medzi ľubovoľných štyroch osôb existujú tri osoby, ktoré poznajú každá s každou alebo existujú tri osoby, medzi ktorými sa žiadne dve nepoznajú. Dokážte, že ich vieme rozdeliť na dve skupiny, kde v jednej skupine sa budú všetci poznať a v druhej skupine sa nikto nebude poznať.

Úloha 9 (KMS 2002/3-L1-11). Máme mn mrežových bodov usporiadaných do obdĺžnikovej siete $m \times n$ bodov. Spomedzi mrežových bodov je $m + n$ bodov zafarbených načerveno. Každé dva červené body, ktoré sa nachádzajú v rovnakom riadku alebo v rovnakom stĺpci sú spojené červenou čiarou. Dokážte, že sa tam musí nachádzať uzavretá lomená čiara z červených spojnic.

Úloha 10 (Výberové sústredenie 2013/14). Šialený vedec zostrojil armádu robotov. Problém je v tom, že niektoré dvojice robotov sa nenávidia (nenávisť je vzájomná). Vždy však s robotmi vie urobiť jednu z nasledujúcich dvoch operácií:

- Ak nejaký robot nenávidí nepárny počet robotov, vedec ho môže zničiť.
- Vedec môže zdvojnásobiť armádu tak, že každý robot R sa rozdelí na dvoch robotov R_1 a R_2 . Pre každú dvojicu pôvodných robotov R, Q , ktorí sa nenávideli, sa budú nenávidieť aj roboti R_1 a Q_1 , aj roboti R_2 a Q_2 . Roboti R_1 a R_2 sa tiež nenávidia pre každého pôvodného robota R . To sú všetky dvojice robotov, ktoré sa budú nenávidieť po zdvojnásobení.

Dokážte, že vedec vie po konečnom počte operácií dostať armádu robotov, v ktorej neexistuje dvojica robotov, ktorá sa nenávidí.

Náznaky riešení

- 1 Indukcia, odoberte dieťa, ktoré chce najviac darčiekov – ukážte, že chce aspoň n .
- 2 Môžete skúsiť indukciu. Ako alternatíva si môžete uvedomiť, že hrany navyše vám neprekážajú. Spravte z grafu stromy a rozdeľte ich do skupín.
- 3 Z najdlhšej cesty nájdite dve dotýkajúce sa kružnice a uvažujte o paritách.
- 4 Zoberte najmenší cyklus ako jednu skupinu. Ak má aspoň 5 vrcholov, je to zjavne OK. Ak má menej a nie je OK, priberte doňho ďalšie vrcholy, nie je veľa možností, ako môže vyzeráť situácia.
- 5 Nájdite vhodný medzikrok, ktorý dokázať. Ako by mohla vyzeráť posledná úvaha? Ukážte, že tam je K_{n+1} .
- 6 Použite indukciu. Nevychádza? Povedzte si, čo to znamená a uveďte si, že vám do dáva dostatok informácií na dokončenie úlohy.
- 7 Rozdeľte na páry a nepáry prípad a indukcia na počet hrán.
- 9 Reprezentujte si situáciu grafom. Vrcholy sú riadky a stĺpce, teda $m + n$ vrcholov. Hranou spojíme vrchol riadku i a vrchol stĺpca j práve vtedy, ak mrežový bod v i -tom riadku a j -tom stĺpci je červený. Toto je pomerne štandardný spôsob reprezentácie bodov / políčok v mriežke pomocou grafu.