

Hamiltonovské kružnice

Jozef Rajník, Zimné sústredenie KMS BETA, 9. – 12. 2. 2022, Kysak

Úloha 1 (KMS 15/16-2L-6). Desať vedúcich KMS je zmrzlinu. Každý z nich má medzi nimi práve 6 kamarátov (kamarátstvo je vzájomné). Zmrzlina obsahuje presne 120 porcií. Vedúci však majú len jednu lyžičku, preto jedia nasledujúcim spôsobom: ten, kto má lyžičku, zje jednu porciu zmrzliny a podá lyžičku nejakému svojmu kamarátovi. Toto sa opakuje, až kým nezjedia celú zmrzlinu. Dokážte, že ak má na začiatku lyžičku ľubovoľný vedúci, tak vedúci zjedia zmrzlinu tak, aby každý zjedol 12 porcií.

Úloha 2. Máme graf s 10 vrcholmi, kde každý vrchol má stupeň aspoň k . Má každý takýto graf hamiltonovskú kružnicu, ak $k = 6$? Aká je najmenšia hodnota k , pre ktorú to platí?

Úloha 3. Zovšeobecnite predošlú úlohu pre prípad n -vrcholového grafu.

Úloha 4 (KMS 11/12-L1-11). Petržlen je guvernérom štátu, kde medzi každými dvoma mestami existuje priame cestné spojenie, bez križovatiek s inými cestami. V štáte je n miest a platí sa mýto v cene x_{ij} za použitie cesty medzi mestami i a j . Cesta medzi dvoma mestami je oboma smermi rovnako drahá. Okružnou cestou nazveme postupnosť n ciest prechádzajúcich cez každé mesto práve raz. Petržlen chce byť spravodlivý, a preto nariadil zákon, ktorý každej okružnej ceste určuje v súčte rovnakú cenu. Dokážte, že potom existujú čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ a $b_1, b_2, \dots, b_n$ také, že pre každé i, j platí $x_{ij} = a_i + b_j$.

Úloha 5. Pre dané prirodzené číslo n nájdite najväčšie číslo k také, že možno do kruhu napísať postupnosť núl a jednotiek dĺžky k takú, že žiadna n -tica sa tam nevyskytuje dvakrát.

Úlohy o kubických grafoch

Nasledovné úlohy sa týkajú grafov, v ktorých má každý vrchol stupeň presne tri. Takéto grafy sa nazývajú *kubické*.

Úloha 6. Máme kubický hamiltonovský graf. Dokážte, že jeho hrany možno zafarbiť tromi farbami tak, aby z každého vrchola vychádzali hrany troch rôznych farieb.

Úloha 7. Máme kubický graf, ktorého hrany sú zafarbené tromi farbami tak, že z každého vrchola vychádzajú hrany troch rôznych farieb.

- a) Je tento graf hamiltonovský?
- b) Viete konkrétnemu zafarbeniu priradiť niečo podobné hamiltonovskej kružnici?
- c) Nájdite súvis medzi počtom takýchto zafarbení hrán kubického grafu a párnymi 2-faktormi, kde *párny 2-faktor* je množina kružníc párnej dĺžky, kde sa každý vrchol grafu nachádza práve v jednej z nich.

Úloha 8. Dokážte, že počet hamiltonovských kružníc kubického grafu, ktoré prechádzajú a) danou dvojicou susedných hrán, b) danou hranou; má rovnakú paritu nezávislú na voľbe hrán.

Úloha 9. Dokážte, že kubický graf nemôže mať práve jednu ani práve dve hamiltonovské kružnice.

Úloha 10. Koľko hamiltonovských kružníc môže mať kubický graf?

Prehľad viet

Veta 1 (Diracova). Každý n -vrcholový graf, ktorého každý vrchol má stupeň aspoň $n/2$, má hamiltonovskú kružnicu.

Veta 2 (Oreho). Nech G je graf (s aspoň tromi vrcholmi), kde pre každé dva rôzne nesusedné vrcholy u, v platí $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. Potom má graf G hamiltonovskú kružnicu.

Veta 3 (Chvátal). Postupnosť $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazývame *hamiltonovskou*, ak každý graf ktorého stupne vrcholov sú postupne aspoň $a_1, a_2, \dots, a_n$, je hamiltonovský. Postupnosť $a_1, a_2, \dots, a_n$ je hamiltonovská práve vtedy, keď pre všetky $i < n/2$ platí $a_i \leq i \Rightarrow a_{n-i} \geq n - i$.