

Okružné cesty

Jozef Rajník, KMS letné sústredenie ALFA, Huty 17. 6. – 24. 6. 2018

V krajine sa nachádza 10 miest a z každého z nich vychádza aspoň 6 ciest do ďalších miest, každá do iného. Z jednej cesty na druhú možno prejsť iba v nejakom meste – mimo miest nie sú križovatky (ale cesty sa tam môžu mimoúrovňovo križovať).

Cestovateľ Krištof by si rád obzrel čo najviac miest. Chce si kúpiť spätnú letenku, je to lacnejšie. Preto musí svoju cestu začať aj skončiť v tom istom meste. Okrem toho mesta však nechce prejsť iným mestom viac ako raz, chce teda spraviť *okružnú cestu*.

Ideálne by mala takáto cesta obsahovať všetky mestá. K tomu sa budeme chcieť dopracovať, ale najskôr budeme nachádzať jednoduchšie okružné cesty. Všetky nasledujúce úlohy riešime pre každé rozmiestnenie ciest medzi 10 mestami, ktoré spĺňa, že z každého mesta vychádza aspoň 6 ciest.

Úloha 1. Dokážte, že v každej takej krajine môže Krištof spraviť okružnú cestu.

Úloha 2. Pokúste sa nájsť takú okružnú cestu, na ktorej je viac miest. Nemusia tam byť všetky, ale pokúste sa nájsť čo najväčšiu.

Úloha 3. Ukážte, že Krištof môže spraviť okružnú cestu cez všetky mestá.

Úloha 4. Bude môcť Krištof spraviť okružnú cestu cez všetky mestá, aj v každej takej krajine s 10 mestami, kde z každého mesta vychádza aspoň 5 ciest.

Úloha 5. Možno číslo 6 (dolná hranica počtu ciest vychádzajúcich z každého mesta) nahradiť menším celým číslom? Ktoré číslo je najmenšie?

Úloha 6. Cestovateľ Krištof by rád dostal nejaký návod, ako zistiť, či môže po nejakej krajine spraviť okružnú cestu. Pre krajinu obsahujúcu n miest nájdite najmenšie také k , že ak z každého mesta vychádza aspoň k ciest, tak Krištof bude môcť v krajine spraviť okružnú cestu bez ohľadu na to, ako vedú cesty.

Úloha 7. V predchádzajúcej úlohe ste našli pre Krištofa nejakú postačujúcu podmienku, t. j. podmienku, ktorú keď krajina spĺňa, tak v nej možno spraviť okružnú cestu. Platí to aj naopak, tzn. musí v každej krajine, kde možno spraviť okružnú cestu, vychádzať z každého mesta aspoň k ciest? Inými slovami, je táto podmienka nutná?

Úloha 8 (iba na zamyslenie). Vedeli by ste nájsť podmienku, ktorá je zároveň nutnou aj postačujúcou pre to, aby sa v krajine dala spraviť okružná cesta?

O teórii grafov

Situácie, s ktorými sme teraz pracovali sa dajú popísať pomocou teórie grafov. Grafom vieme reprezentovať situáciu, kde máme nejaké objekty (mestá, ľudia, čísla, ...), tie sa nazývajú *vrcholy*, a nejakú vlastnosť, ktorá môže byť medzi nimi (mestá sú spojené cestou, ľudia sa kamarátia, dve čísla sú súdeliteľné). Ak dva vrcholy majú chcenú vlastnosť, hovoríme, že sú spojené *hranou*. Teória grafov nám poskytuje za prvé terminológiu, ktorou vieme takéto situácie popísať, a za druhé dokázané tvrdenia, ktoré nám môžu pomôcť.

Okružné cesty sa v teórii grafov nazývajú *kružnice* alebo *cykly*. Taká kružnica, ktorá prechádza cez všetky vrcholy grafu sa nazýva *hamiltonská kružnica*. V úlohách vyššie sme teda objavili podmienky, za ktorých graf obsahuje hamiltonovskú kružnicu, takýto graf sa volá aj *hamiltonovský*. Táto podmienka je známa aj ako nasledovná veta.

Veta 1 (Diracova veta). Ak v grafe s $n \geq 3$ vrcholmi má každý vrchol stupeň aspoň $n/2$, tak je hamiltonovský.

Oreho veta je miernou modifikáciou Diracovej vety. Dôkaz má podobný.

Veta 2 (Oreho veta). Ak v grafe s $n \geq 3$ vrcholmi je súčet stupňov každých dvoch nesusedných vrcholov je n , tak je hamiltonovský.

Všetky postačujúce podmienky však vyjadrujú to, že graf je hamiltonovský, ak má veľa hrán. Vôbec teda nezahŕňajú grafy ako napr. grafy, kde má každý vrchol stupeň práve 3; samotné kružnice a pod. Nájst' ľahko overiteľnú nutnú a postačujúcu podmienku sa javí ako ťažká úloha. Dokonca je na ňu vypísaná odmena milión dolárov, prípadne na ukázanie toho, že žiadna také podmienka neexistuje – k tomu sa aj veľa matematikov a informatikov prikláňa. Súvisí to s tým, že rozhodnúť, či je graf hamiltonovský je tzv. NP-úplný problém. Viac na https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_path.