

Kombinatorická teória hier

Jozef Rajník, Letná škola matematiky 31. 7. – 4. 8. 2017

Dobré materiály k teórii hier, nielen kombinatorickej, nájdete v seriály Teorie her od Matematického korespondenčného seminára (PraSe), dostupný na adrese <http://mks.mff.cuni.cz/archive/32/12.pdf>

Záujemcovia môžu úlohy riešiť poobede (primárne utorok). Budem niekde v akváriu, resp. okolí. Môžete sa ma spýtať o radu a skontrolovať si riešenia.

Úlohy z prednášky

Na prednáške si preriešime tieto úlohy, zrejme prvé štyri z nich podľa tempa. Ilustrujeme si na nich niekoľko metód, ktoré možno použiť pri analýze takých hier a pri hľadaní víťazných stratégií.

Úloha 1. Na stole je 47 zápalek, s ktorými hrajú Anastázia a Bronislava nasledujúcu hru. V každom ťahu jedna z hráčov odstráni zo stola jednu alebo 2 zápalky. Začína Anastázia a následne sa s Bronislavou striedajú v ťahoch. Hráčka, ktorá zoberie poslednú zápalku, vyhráva. Ktorá z hráčov má víťaznú stratégiu?

Úloha 2. V pravom hornom rohu šachovnice stojí jednostranná veža – môže sa pohybovať iba doľava alebo dole. Hráči sa striedajú v ťahoch, pričom si môžu vybrať, o koľko políček (aspoň o jedno) posunú vežu v jednom z povolených smerov. Kto nemôže potiahnuť, prehral. Kto má víťaznú stratégiu?

Úloha 3. Dvaja hráči, biely a čierny, hrajú hru na šachovnici 8×8 , biely začína. Vo svojom ťahu položí hráč koňa svojej farby na voľné políčko, ktoré ešte nie je ohrozené súperovým koňom. Hráč, ktorý nemôže nikam položiť svojho koňa, prehráva. Kto má víťaznú stratégiu? Ako by hra dopadla pri šachovnici 9×9 .

Úloha 4. Zajo a Miro hrajú piškvorky na štvorcovom pláne 10×10 , Zajo začína a pravidelne sa striedajú v ťahoch. V každom ťahu nakreslí hráč svoj symbol do voľného políčka. Zajo vyhrá, ak vytvorí zo svojich symbolov štvorec 2×2 . Miro vyhrá, ak v tom Zajovi zabráni. Kto má víťaznú stratégiu?

Úloha 5. Marián a Dávid si sadli za okrúhly stôl s 2 017 stoličkami a idú hrať hru o prežitie. V každom ťahu, hráč odstráni od stola jednu susednú stoličku. Pokiaľ na tejto stoličke sedel jeho súper, tak hráč na ťahu vyhráva. Hru začína Marián a následne sa strieda s Dávidom v ťahoch. Určte, ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu.

Ďalšie úlohy

Úlohy sú približne zoradené podľa obtiažnosti. Podotýkam, že obtiažnosť niektorých kombinatorických úloh je dosť subjektívna. Ide hlavne o tie úlohy, ktoré majú jednoduché riešenie na pochopenie, ktoré však vyžaduje prísť so správnym nápadom, fintou.

Úloha 6. Na stole je n zápalek. V jednom ťahu môže hráč zobrať taký počet zápalek, ktorý je mocninou dvojky (teda 1, 2, 4, 8, 16, ...). Kto nemôže potiahnuť, prehral. Kto má víťaznú stratégiu?

Úloha 7. Pravidlá hry sú rovnaké, ako v predchádzajúcej hre, ale hráč, ktorý nemôže potiahnuť, vyhráva. Kto má víťaznú stratégiu?

Úloha 8. Dvaja háči píšú 20-ciferné číslo tak, že striedavo zľava doprava pripisujú jednu cifru. Prvý hráč vyhraje, ak je výsledné číslo deliteľné siedmimi, inak vyhraje druhý hráč.

Úloha 9. Klokán a vtákopysk vyhrali v tombole čokoládu s rozmermi 5×16 dielikov. Povedali si, že ju nezjedia len tak, ale že si s ňou zahrajú hru. Striedajú sa pravidelne v ťahoch. Zvieratko, ktoré je na ťahu, zlomí čokoládu na dva kusy, vyberie si jeden z nich a celý ho zje. Čokoládu pritom môže lámať len po pôvodne naznačených čiarach medzi dielikmi. Zvyšok podá druhému zvieratku, ktoré tak isto zlomí čokoládu, jeden kus zje a druhý podá súperovi. Takto sa to opakuje. Akonáhle niektoré zvieratko vytvorí kus s rozmermi 1×1 , prehrá. Ako prvý je na ťahu klokán. Ktoré zvieratko vyhrá, ak obidve hrajú najlepšie ako je možné?

Úloha 10. V pravom hornom rohu šachovnice stojí jednostranný kráľ, ktorý sa môže pohybovať práve o jedno políčko dole, doľava alebo doľava dole. Hráči ním striedavo ťahajú. Kto nemôže potiahnuť, prehral. Kto má víťaznú stratégiu?

Úloha 11. Máme čokoládu 4×8 tabličiek. Vo svojom ťahu môže hráč rozlomiť po vyznačených čiarami ľubovoľný kus čokolády, ktorý rozlomiť ide. Kto rozlomí posledný kúsok, ktorý sa dá, vyháva (a zje celú čokoládu). Ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu?

Úloha 12. Pravidlá hry sú rovnaké, ako v predchádzajúcej hre, avšak je zakázané odlamovať kúsky 1×1 . Kto vyhrá teraz?

Úloha 13 (zo základnej sady 1.21). Dvaja hráči hrajú takúto hru: na tabuľu píše čísla od 1 do 1 000 vrátane, pričom ak je nejaké číslo c už napísané na tabuli, ďalší hráč na ťahu môže pripísať buď číslo $c + 1$, alebo číslo $2c$. Čísla sa z tabule nezotierajú a každé môže byť napísané najviac raz. Prvý hráč začína, pričom na tabuli je napísané iba číslo 1. Vyhrá ten, kto prvý napíše číslo 1 000. Pre ktorého z hráčov existuje víťazná stratégia? Popíšte ju.

Úloha 14. Na stole je rozložených v rade $2n$ kariet. Na každej karte je zhora napísané jedno prirodzené číslo. Martin a Michal hrajú s nimi nasledovnú hru. Martin začína a následne sa s Michalom striedajú v ťahoch. V jednom ťahu si hráč na ťahu zoberie k sebe jednu kartu z kraja. Hra skončí, keď sa minú všetky karty na stole. Na konci hry si každý hráč spočíta svoje skóre: súčet čísel na kartách, ktoré so hráč zobral. Hráč s vyšším skóre vyháva. V závislosti od prirodzeného čísla n určte, ktorý z hráčov má víťaznú, resp. neprehrávajúcu stratégiu.

Úloha 15. Rastó má na záhrade ešte stále vyrytú šachovnicu s 2007×2007 políčkami. So sestrou Slávkou si povedali, že si zmerajú sily. Presne v strede šachovnice sa nachádza obrovský kameň, ktorý najprv Rastó posunie o jedno políčko (rovnobežne so stranami šachovnice). Slávka ho potom bude musieť posunúť o dve políčka, Rastó o štyri políčka, Slávka o osem políček – v k -tom ťahu ho vždy budú musieť posunúť o 2^{k-1} políček. Ten, kto je na ťahu, prehráva, ak už nemôže posunúť kameň. Nájdite víťaznú stratégiu pre Slávku alebo pre Rastá.

Úloha 16 (zo základnej sady 1.33). Kružnica, rozdelená na n oblúkov bodmi postupne pomenovanými $1, 2, 3, \dots, n$, reprezentuje hraciu arénu pre dvoch hráčov, ktorí sa striedajú v ťahaní. V jednom ťahu si hráč vyberie dva zatiaľ voľné body (také, ktoré ešte nie sú koncom žiadnej úsečky) s rovnakou paritou a spojí ich úsečkou. Môže ale spojiť iba také body, aby novovzniknutá úsečka nepretínala žiadnu z predchádzajúcich úsečiek. Prehrá ten hráč, ktorý už nemôže spraviť ťah. Ak obaja hráči používajú optimálnu stratégiu, ktorý z nich vyhrá?

Úloha 17. Na začiatku hry je na tabuli napísané číslo 2. V jednom ťahu hráč pripočíta k číslu jeho ľubovoľného kladného deliteľa, ktorý je menší ako napísané číslo (teda k číslu 12 môžeme pripočítať 1, 2, 3, 4 alebo 6). Hráč, ktorý ako prvý prekročí číslo 5 773, prehrá. Ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu? Ktorý ju má v prípade, keby hráč, čo prvý prekročí číslo 5773, vyhral?