

Invarianty

Jozef Rajník, 17. 2. 2017

Úloha 1. Na stole máme v rade uložených $n \geq 2$ pohárov postavených na dne. V jednom ťahu môžeme vybrať dva susedné poháre a oba preklopiť naopak. Zistite, pre ktoré celé čísla $n \geq 2$ možno po niekoľkých ťahoch dostať stav, kedy sú všetky poháre hore dnom?

Úloha 2. Na tabuli máme napísané čísla $1, 2, \dots, n$. V jednom kroku môžeme zmažeme ľubovoľné dve čísla z tabule a nahradíme ich ich rozdielom (v absolútnej hodnote). Určte paritu čísla, ktoré ostane na tabuli ako posledné.

Úloha 3. Na tabuli sú napísané čísla od 1 do 1 000 000, každé práve raz. Každé číslo zotrieme a nahradíme ho jeho ciferným súčtom. Tento proces opakujeme, až kým na tabuli nezostanú len jednociferné čísla. Ktorých čísel ostane na tabuli najviac?

Úloha 4. Na ostrove v Tichomorí žijú chameleóny troch farieb: žlté, zelené a hnedé. Keď sa stretnú dva chameleóny rôznych farieb, oba sa prefarbia na tretiu farbu. V istom momente bolo na ostrove 13 žltých, 15 zelených a 17 hnedých chameleónov. Je možné, aby bolo po istom čase všetkých 45 chameleónov rovnakej farby? (Predpokladáme, že sa žiadny nový nenarodí, ani žiaden neumrie.) [KMS 03/04, Z1, 5]

Úloha 5. Na obvode kruhu sú napísané za sebou čísla $1, 0, 1, 0, 0, 0$. V jednom kroku môžeme dve susedné čísla zväčšiť o 1. Môžeme po niekoľkých krokoch dostať na obvode kruhu všetky čísla rovnaké?

Úloha 6. Na tabuli je narysovaných 5 kružníc, 7 štvorcov a 9 trojuholníkov. Marek a Paľo hrajú hru, v ktorej striedavo robia ťahy. Urobiť ťah znamená zotrieť ľubovoľné dva obrazce a nahradiť ich jedným novým. V jednom ťahu možno nahradiť

- dve kružnice kružnicou,
- dva trojuholníky štvorcom,
- kružnicu a trojuholník trojuholníkom,
- dva štvorce trojuholníkom,
- kružnicu a štvorec štvorcom,
- štvorec a trojuholník kružnicou.

Paľo vyhrá, ak na konci ostane štvorec. Marek vyhrá, ak na tabuli zostane trojuholník. Ukážte, pre ktorého hráča existuje víťazná stratégia, ak hru začína Marek. Popíšte túto stratégiu.

Úloha 7. Mojo našiel v školskom sklade tabuľku $n \times n$. Na každom políčku tabuľky bola lampa. Na začiatku boli všetky lampy vypnuté. Potom sa s ňou Mojo začal hrať. V každom ťahu si vybral v riadku alebo stĺpci m po sebe idúcich lúčok a zmenil stav týchto lúčok (zo zapnutej na vypnutú a naopak). Dokážte, že stav, v ktorom sú všetky lampy zapnuté, vie Mojo dosiahnuť práve vtedy, keď číslo m je deliteľom čísla n . [KMS 15/16, Z2, 7]