

# Maximalizačné a minimalizačné úlohy v kombinatorike

Jozef Rajník, KMS sústredenie BETA, Dobrá Voda, 17. 2. – 24. 2. 2018

**Úloha 1** (Matematický Náboj 2015, 10J). Hráme loďky na štvorčekovom papieri rozmerov  $9 \times 9$ . Náš súper niekde umiestnil svoj Titanic tvaru  $5 \times 1$  alebo  $1 \times 5$  štvorčekov. Najmenej koľko krát musíme vystreliť, kým si budeme istí, že sme zasiahli súperov Titanic aspoň raz (vystreliť znamená označiť niektoré políčko z mriežky)?

**Úloha 2.** Na pláne  $n \times n$  štvorčekov sa nachádza loď pozostávajúca z troch štvorčekov v tvare L (ľubovoľne otočená). Koľkokrát musíme najmenej vystreliť, aby sme loď zasiahli aspoň raz?

**Úloha 3** (KMS 07/08-Z1-6). V štvorcovom parku je do štvorcovej mriežky  $100 \times 100$  umiestnených 10 000 stromov. Koľko z nich sa dá najviac vyťať tak, aby zo žiadneho pňa nebolo vidieť iný peň? Dokážte, že viac pňov sa už takto vyťať nedá.

**Úloha 4** (MO 58-B-I-4, [kms.sk/ako\\_riesit/lode/](http://kms.sk/ako_riesit/lode/)). Na pláne  $7 \times 7$  hráme hru lode. Nachádza sa na ňom jedna loď  $2 \times 3$ . Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí. Ak nie, pýtame sa znova. Určte najmenší počet otázok, ktoré potrebujeme, aby sme s istotou loď zasiahli.

**Úloha 5** (KMS 15/16-1L-6). Ľudka a Kika si zobrali tabuľku  $m \times n$  políčok, kde  $m, n$  sú nepárne prirodzené čísla. Každé jej políčko zafarbili namodro alebo načerveno. Ľudke sa páčia *červeno dominantné* riadky. To sú také riadky, ktoré obsahujú viac červených políčok ako modrých. Kika zas obľubuje *modro dominantné* stĺpce, teda také stĺpce, ktoré obsahujú viac modrých políčok ako červených. Ľudka a Kika pri zafarbovaní spolupracovali, aby boli obe spokojné. V závislosti od čísel  $m, n$  nájdite najväčší súčet počtu modro dominantných stĺpcov a červeno dominantných riadkov, ktorý Ľudka s Kikou mohli dostať.

**Úloha 6** (KMS 14/15-2Z-9, upravené). Tabuľku  $7 \times 7$  chceme vydláždiť triominami L a tetreminami S. Koľko najmenej triomín L musíme použiť, ak chceme tabuľku vydláždiť?

**Úloha 7** (PraSe, 1. podzimní série 2014). Na každom políčku šachovnice  $8 \times 8$  sa nachádza Rätta. Keď prof. Jablůň zapíska, každá Rätta sa presunie na políčko, ktoré susedí stranou s políčkom, na ktorom bola Rätta doposiaľ. Koľko najviac políčok môže ostať voľných?

**Úloha 8** (KMS 10/11-L3-7). Vedúci KMS radi klebetia a každý z nich pozná niekoľko klebiet. Každí dvaja vedúci poznajú aspoň jednu rovnakú klebetu. Navyše žiadni dvaja nepoznajú presne tú istú množinu klebiet (aj v prípade, že Kubko pozná len klebetu  $A$  a Maťko klebetu  $A$  a  $B$ , hovoríme, že poznajú iné klebety). Koľko najviac vedúcich môže mať KMS, ak všetci dokopy poznajú práve  $n$  rôznych klebiet?

**Úloha 9.** Máme kruh s polomerom 12 cm. Koľko najviac bodov môžeme doňho umiestniť, aby vzdialenosť každých dvoch bodov bola aspoň 7 cm?