

Maximalizačné a minimalizačné úlohy v kombinatorike

Jozef Rajník

2 Rátanie

Úloha 2.1 (KMS 15/16-1L-6). Ľudka a Kika si zobrali tabuľku $m \times n$ políčok, kde m , n sú nepárne prirodzené čísla. Každé jej políčko zafarbili namodro alebo načerveno. Ľudke sa páčia *červeno dominantné* riadky. To sú také riadky, ktoré obsahujú viac červených políčok ako modrých. Kika zas obľubuje *modro dominantné* stĺpce, teda také stĺpce, ktoré obsahujú viac modrých políčok ako červených. Ľudka a Kika pri zafarbovaní spolupracovali, aby boli obe spokojné. V závislosti od čísel m , n nájdite najväčší súčet počtu modro dominantných stĺpcov a červeno dominantných riadkov, ktorý Ľudka s Kikou mohli dostať.

3 Matematická indukcia

Úloha 3.1. Máme tabuľku $2^n \times 2^n$ štvorčekov, ktorú dláždime triominami tvaru L. Koľko najmenej štvorčekov môže ostať nepokrytých dlaždicou?

Úloha 3.2. *Hanojské veže* je hlavolam, ktorý sa skladá z troch tyčí (veží) a n diskov (s dierou uprostred) rôznych veľkostí. Na začiatku sú všetky disky uložené na jednej veži. V jednom ťahu môžeme presunúť navrchnejší disk z jednej veže a položiť ho na vrch druhej veže, ak sa tam nachádza disk s väčším priemerom.

V závislosti od n určte najmenší počet ťahov potrebný na presunutie diskov z jednej veže na druhú.

Úloha 3.3. Zajo je krásny a preto si aj svoj plot chce natrieť krásne. Krásny plot musí spĺňať nasledujúce pravidlá:

- žiadne dve susedné latky nemajú rovnakú farbu,
- nevieme z plota vybrať štyri latky (nie nutne susedné) bez zmeny ich poradia tak, aby boli natreté v poradí X , Y , X , Y , pre žiadne dve rôzne farby X , Y .

Koľko najviac latiek môže mať Zajov plot, ak nechce použiť viac ako n rôznych farieb?

Úloha 3.4 (KMS 06/07-1Z-11 (ťažká)). Na ostrove žije n domorodcov. jedného dňa náčelník rozhodol, že všetci (vrátane neho) si urobia a budú nosiť náhrdelník zložený z 0 alebo viac jednofarebných kamienkov. Dvaja domorodci majú mať aspoň jeden kamienok rovnakej farby práve vtedy, keď sú priatelia.

- Dokážte, že domorodci môžu splniť náčelníkov rozkaz.
- Aký je minimálny počet farieb kamienkov potrebný na to, aby sa dal splniť náčelníkov rozkaz bez ohľadu na priateľské vzťahy na ostrove?

4 Ďalšie úlohy na preberané metódy

Úloha 4.1 (KMS 17/18-3Z-9). Linoleum na podlahe jedálne tvorí štvorčekovú mriežku $m \times n$ štvorčekov. V každom štvorčeku sa nachádza jeden stôl. Osvetlenie jedálne zabezpečujú lampy, ktoré sa nachádzajú v niektorých mrežových bodoch mriežky (vrátane tých na obode, všetkých mrežových bodov je teda $(m+1)(n+1)$). Každá lampa osvetľuje stoly na tých štvorčekoch, v ktorých rohoch sa nachádza. V závislosti od prirodzených čísel m , n nájdite najmenší počet lúčok potrebný na to, aby každý stôl bol osvetlený aspoň dvomi lampami.

Úloha 4.2 (KMS 14/15-2Z-9, upravené). Tabuľku 7×7 chceme vydláždiť triominami L a tetreminami S. Koľko najmenej triomín L musíme použiť, ak chceme tabuľku vydláždiť?