

# Maximalizačné a minimalizačné úlohy v kombinatorike

Jozef Rajník, KMS sústreďenie BETA, Dobrá Voda, 17. 2. – 24. 2. 2018

## 1 Delenie na malé časti a dirichletov princíp

Odhad môžeme získať tak, že si tabuľku rozdelíme na niekoľko malých častí, ktoré sa neovplyvňujú, čo vo väčšine úloh znamená, že sa neprekrývajú. O malej časti vieme, koľko najmenej výstrelů (či dačoho iného) v nej musí byť a keďže tieto časti sa neovplyvňujú, môžeme tieto odhady nasčítať.

**Úloha 1.1** (Matematický Náboj 2015, 10J). Hráme loďky na štvorčekovom papieri rozmerov  $9 \times 9$ . Náš súper niekde umiestnil svoj Titanic tvaru  $5 \times 1$  alebo  $1 \times 5$  štvorčekov. Najmenej koľko krát musíme vystreliť, kým si budeme istí, že sme zasiahli súperov Titanic aspoň raz (vystreliť znamená označiť niektoré políčko z mriežky)?

**Úloha 1.2.** Na pláne  $n \times n$  štvorčekov sa nachádza loď pozostávajúca z troch štvorčekov v tvare L (ľubovoľne otočená). Koľkokrát musíme najmenej vystreliť, aby sme loď zasiahli aspoň raz?

*Na seminári sme to riešili len pre párne  $n$ . Pre nepárne to nie je až taká priamočiara úprava, ako som si myslel, ale nie je to nič zložité. Všetky potrebné metódy sme si ukázali. Treba sa len pohrať a správne ich vyskladať. Hl. myšlienka riešenia je na konci.*

**Úloha 1.3** (KMS 07/08-Z1-6). V štvorcom parku je do štvorcovej mriežky  $100 \times 100$  umiestnených 10 000 stromov. Koľko z nich sa dá najviac vyťať tak, aby zo žiadneho pňa nebolo vidieť iný peň? Dokážte, že viac pňov sa už takto vyťať nedá.

**Úloha 1.4** (MO 58-B-I-4, [kms.sk/ako\\_riesit/lode/](http://kms.sk/ako_riesit/lode/)). Na pláne  $7 \times 7$  hráme hru lode. Nachádza sa na ňom jedna loď  $2 \times 3$ . Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí. Ak nie, pýtame sa znova. Určte najmenší počet otázok, ktoré potrebujeme, aby sme s istotou loď zasiahli.

**Úloha 1.5** (PraSe, 1. podzimní série 2014). Na každom políčku šachovnice  $8 \times 8$  sa nachádza Rätta. Keď prof. Jablň zapíska, každá Rätta sa presunie na políčko, ktoré susedí stranou s políčkom, na ktorom bola Rätta doposiaľ. Koľko najviac políčok môže ostať voľných?

**Úloha 1.6** (KMS 10/11-L3-7). Vedúci KMS radi klebetia a každý z nich pozná niekoľko klebiet. Každí dvaja vedúci poznajú aspoň jednu rovnakú klebetu. Navyše žiadni dvaja nepoznajú presne tú istú množinu klebiet (aj v prípade, že Kubko pozná len klebetu  $A$  a Maťko klebety  $A$  a  $B$ , hovoríme, že poznajú iné klebety). Koľko najviac vedúcich môže mať KMS, ak všetci dokopy poznajú práve  $n$  rôznych klebiet?

**Úloha 1.7** (59MO-A-III-2, upravené). Máme kruh s polomerom 12 cm. Koľko najviac bodov môžeme doňho umiestniť, aby vzdialenosť každých dvoch bodov bola aspoň 7 cm?

## 2 Rátanie

Ďalší spôsob získavania odhadů je niečo jednoduché porátať. Počty pokrytých políčok, ukázať, že ak by výsledok bol väčší, mali by sme priveľa políčok alebo dačo iné nevyjde.

**Úloha 2.1** (KMS 15/16-1L-6). Ľudka a Kika si zobrali tabuľku  $m \times n$  políčok, kde  $m$ ,  $n$  sú nepárne prirodzené čísla. Každé jej políčko zafarbili namodro alebo načerveno. Ľudke sa páčia *červeno dominantné* riadky. To sú také riadky, ktoré obsahujú viac červených políčok ako modrých. Kika zas obľubuje *modro dominantné* stĺpce, teda také stĺpce, ktoré obsahujú viac modrých políčok ako červených. Ľudka a Kika pri zafarbovaní spolupracovali, aby boli obe spokojné. V závislosti od čísel  $m$ ,  $n$  nájdite najväčší súčet počtu modro dominantných stĺpců a červeno dominantných riadkov, ktorý Ľudka s Kikou mohli dostať.

## 3 Matematická indukcia

Ňou vieme získať aj odhady, aj lepšie popisovať konštrukcie.

**Úloha 3.1.** Máme tabuľku  $2^n \times 2^n$  štvorčekov, ktorú dláždime triominami tvaru L. Koľko najmenej štvorčekov môže ostať nepokrytých dlaždicou?

**Úloha 3.2.** *Hanojské veže* je hlavolam, ktorý sa skladá z troch tyčí (veží) a  $n$  diskov (s dierou uprostred) rôznych veľkostí. Na začiatku sú všetky disky uložené na jednej veži. V jednom ťahu môžeme presunúť navrchnejší disk z jednej veže a položiť ho na vrch druhej veže, ak sa tam nachádza disk s väčším priemerom.

V závislosti od  $n$  určte najmenší počet ťahov potrebný na presunutie diskov z jednej veže na druhú.

**Úloha 3.3.** Zajo je krásny a preto si aj svoj plot chce natrieť krásne. Krásny plot musí spĺňať nasledujúce pravidlá:

- žiadne dve susedné latky nemajú rovnakú farbu,
- nevieme z plotu vybrať štyri latky (nie nutne susedné) bez zmeny ich poradia tak, aby boli natreté v poradí  $X, Y, X, Y$ , pre žiadne dve rôzne farby  $X, Y$ .

Koľko najviac latiek môže mať Zajov plot, ak nechce použiť viac ako  $n$  rôznych farieb?

**Úloha 3.4** (KMS 06/07, 1. zimná séria, úloha 11). Na ostrove žije  $n$  domorodcov. jedného dňa náčelník rozhodol, že všetci (vrátane neho) si urobia a budú nosiť náhrdelník zložený z 0 alebo viac jednofarebných kamienkov. Dvaja domorodci majú mať aspoň jeden kamienok rovnakej farby práve vtedy, keď sú priatelia.

- Dokážte, že domorodci môžu splniť náčelníkov rozkaz.
- Aký je minimálny počet farieb kamienkov potrebný na to, aby sa dal splniť náčelníkov rozkaz bez ohľadu na priateľské vzťahy na ostrove?

## 4 Ďalšie úlohy na preberané metódy

**Úloha 4.1** (KMS 10/11-L1-7). Mišo má dva balíčky kariet. V prvom je  $n$  červených kariet a v druhom  $n$  bielych. Mišo vymyslel s nimi hru a pozval k sebe  $n$  ľudí, aby si ju zahráli. Najprv posadí hráčov do kruhu za stôl. Potom každému rozdal práve dve karty. Hra prebieha v kolách. V jednom kole hráči naraz posunú jednu kartu hráčovi po ich ľavici, pričom, ak má hráč v ruke červenú kartu, posúva doľava červenú, inak bielu. Hra končí, ak má každý na ruke dve karty rôznej farby. Najviac koľko kôl môže trvať Mišova hra?

**Úloha 4.2** (KMS 17/18-3Z-9). Linoleum na podlahe jedálne tvorí štvorčekovú mriežku  $m \times n$  štvorčekov. V každom štvorčeku sa nachádza jeden stôl. Osvetlenie jedálne zabezpečujú lampy, ktoré sa nachádzajú v niektorých mrežových bodoch mriežky (vrátane tých na obode, všetkých mrežových bodov je teda  $(m+1)(n+1)$ ). Každá lampa osvetľuje stoly na tých štvorčekoch, v ktorých rohoch sa nachádza. V závislosti od prirodzených čísel  $m, n$  nájdite najmenší počet lúčov potrebný na to, aby každý stôl bol osvetlený aspoň dvomi lampami.

**Úloha 4.3** (KMS 14/15-2Z-9, upravené). Tabuľku  $7 \times 7$  chceme vydláždiť triominami L a tetreminami S. Koľko najmenej triomín L musíme použiť, ak chceme tabuľku vydláždiť?

## 5 Ešte ďalšie úlohy

Tu sú ďalšie úlohy, ktoré som našiel, niektoré z nich ani nemám prerátané :D. Niekde sa dajú aplikovať metódy, ktoré sme preberali, niektoré majú riešenie na svoj vlastný spôsob. Takto to býva s mnohými kombinatorickými úlohami, s ktorými sa stretnete. Netreba vedieť nejaké drsné finty, stačí sa len s tým pohrať, objaviť ako fungujú a nezabudnúť, že treba ukázať dve časti – že to ide na toľko, koľko to má byť, a že to nejde na viac (na menej). Samozrejme, treba rozlišovať, čo je presný matematický dôkaz a čo je len naša intuícia, že dané veci sú rozmiestnené optimálne alebo nejako lokálne najlepšie (pekná ilustrácia toho, ako to nefunguje je v úlohe 1.4.

**Úloha 5.1** (KMS 08/09-L3-1). Po obvode kruhu sedí 2008 vedúcich Trojstenu a každý z nich má niekoľko lentiliiek. Počet lentiliiek každých dvoch susedných vedúcich sa líši o 2 alebo o 3. Najviac o koľko sa môže líšiť počet lentiliiek dvoch vedúcich, ak žiadni dvaja vedúci nemajú rovnako veľa lentiliiek?

**Úloha 5.2** (KMS 08/09-Z3-2). Štyri manželské páry sa rozhodli usporiadať tenisový turnaj v zmiešanej štvorhre (to znamená, že proti sebe hrajú dva zmiešané páry). Aby predišli hádkam, dohodli sa, že nikd y nebudú na ihrisku súčasne obaja manželia z toho istého páru, ani ako spoluhráči, ani ako súper. Aby sa nikto veľmi neunavil, v jeden deň hral každý najviac jeden zápas. A aby to bolo úplne spravodlivé, zahráli každé dve dvojice, ktoré mohli hrať proti sebe, práve jeden zápas. Za koľko najmenej dní mohli odohrať takýto turnaj?

**Úloha 5.3** (KMS 07/08-Z2-7). Dada má krúžok a na ňom  $n$  kľúčov ( $n \geq 3$ ). Keď ho vyberie z vrečka, nevie, či sa jej náhodou nepootočil alebo neobrátil. Jediný spôsob, ako rozlíšiť kľúče, je zafarbiť ich (každý kľúč dostane jednu farbu). Aký je najmenší možný počet farieb, ktoré Dada potrebuje?

**Úloha 5.4** (KMS 07/08-Z3-9). Nájdite najmenšie celé číslo  $d$  také, že čísla  $1, 2, \dots, 16$  vieme rozmiestniť na šachovnicu  $4 \times 4$  tak, že každé použijeme práve raz a rozdiel čísel na ľubovoľných dvoch políčkach susediacich stranou bude najviac  $d$ .

**Úloha 5.5** (KMS 07/08-Z3-9). Dokážte, že čísla  $1, 2, \dots, 16$  vieme rozmiestniť na šachovnicu  $4 \times 4$  tak, že každé použijeme práve raz a rozdiel čísel na ľubovoľných dvoch políčkach susediacich stranou bude najviac 4. Dokážte, že ich nevieme rozmiestniť tak, aby sme opäť každé použili práve raz, ale rozdiel čísel na ľubovoľných dvoch susedných políčkach bol vždy najviac 3.

**Úloha 5.6** (KMS 09/10-L1-7). Petržlen bol u Ondreja na izbe a zbadal jeho prešibanú krysu. Nedalo sa nevšimnúť, že mala niečo za ľubom (vlastne ako vždy). Ofarbovala prirodzené čísla rôznymi farbami (každé číslo práve jednou farbou) tak, aby platilo: Ak je rozdiel dvoch rôznych prirodzených čísel prvočíslo, tak tieto čísla majú rôznu farbu. S akým najmenším počtom rôznych farieb sa to mohlo kryse podariť?

**Úloha 5.7** (KMS 09/10-L1-11). Medzi vedúcimi KMS je istá skupina ľudí obľubujúcich konzumáciu Horaliiek po šírke. Je známe, že týchto zaujímavých ľudí je aspoň päť. Niektorí ľudia v tejto skupine sa poznajú, iní zas nie. Vzťah poznania sa je vzájomný, teda ak Bus pozná Fofa, tak aj Fofa pozná Busa. Povedzme si niečo viac o tejto skupine. Vieme, že ak sa v nej dvaja ľudia poznajú, tak nemajú žiadnych spoločných známych. Ľubovoľní dvaja ľudia, ktorí sa nepoznajú, majú presne dvoch spoločných známych. Zistite, koľko najmenej ľudí môže byť v tejto skupine.

**Úloha 5.8** (KMS 10/11-Z1-14). Množina  $X$  má 56 prvkov. Nájdite najmenšie prirodzené  $n$  také, že platí nasledovné tvrdenie: Ak vyberieme ľubovoľných 15 podmnožín  $X$  takých, že počet prvkov zjednotenia ľubovoľných sedem z nich je aspoň  $n$ , potom z týchto 15 podmnožín určite vieme vybrať tri s neprázdny prienikom.

**Úloha 5.9** (KMS 10/11-L3-2). Mojo ide do obchodu kúpiť zubnú kefku. Vie, že kefka bude stáť aspoň jeden cent a najviac 4 eurá a 99 centov. Doma má 10 mincí z každého druhu: 1, 2, 5, 10, 20, 50-centové a 1 a 2 eurové. Do peňaženky sa mu spolu zmestí len 6 mincí. Aké mince si má zobrať, aby mohol presne zaplatiť čo najviac rôznych cien? (Presne znamená bez vydávania.)

**Úloha 5.10** (KMS 10/11-L3-6). Vedúce KMS každý týždeň zostavujú rebríček desiatich najmúdrejších vedúcich, pričom nikdy nedajú viacerých vedúcich na rovnaké miesto. Katka si všimla, že už  $T$  týždňov sú v rebríčku tí istí vedúci. Tiež si všimla, že vedúci v rebríčku počas týchto  $T$  týždňov nikdy neboli presne v rovnakom poradí. Navyše, ak nejaký vedúci v rebríčku (počas týchto  $T$  týždňov) klesol, v žiadnom ďalšom týždni už nestúpil na vyššiu priečku. (Kým však neklesol, mohol stúpať.) Akú najväčšiu hodnotu môže mať číslo  $T$ ?

**Úloha 5.11.** Nech  $n \geq 1$  je celé číslo. Aký je najväčší možný počet disjunktných dvojíc prvkov množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$  ktorých súčty neprevyšujú  $n$ ?

**Úloha 5.12** (IMO 2009 shortlist, C6). Máme šachovnicu rozmerov  $999 \times 999$ . Figúrka Rätta sa po nej hýbe nasledovným spôsobom: Z každého políčka sa môže pohnúť na niektoré stranou susedné políčko, pričom každý pohyb musí byť zákruta, t. j. smery každých dvoch za sebou idúcich pohybov musia byť na sebe kolmé. *Nepretínajúca sa cesta* Rätty je postupnosť po dvoch rôznych políčkach takých, že ich môže Rätta navštíviť svojimi ťahmi v rovnakom poradí. Nepretínajúca sa cesta sa nazýva *cyklická*, ak Rätta sa z posledného políčka cesty dokáže svojím ťahom dostať na prvé políčko cesty a pokračovať po nej od začiatku.

Koľko políčok obsahuje najdlhšia možná cyklická nepretínajúca sa cesta Rätty?

**Úloha 5.13** (KMS 11/12-Z1-11). Prof. Jablň má v laboratóriu 8 krabíc a v každej z nich má práve 6 pokébalov. Rozhodol sa každý pokébal zafarbiť jednou z  $n$  rôznych farieb tak, aby platilo:

- Ľubovoľné dve pokébaly v rovnakej krabici majú rôzne farby.
- Ľubovoľné dve farby sa súčasne vyskytujú v najviac jednej krabici.

Nájdite najmenšie prirodzené číslo  $n$ , pre ktoré dokáže prof. Jablň takto zafarbiť pokébaly.

**Úloha 5.14** (KMS 11/12-L1-9). Hago má doma kocku s dĺžkou hrany 3, ktorá je rozdelená na 27 rovnakých malých kociek s dĺžkami hrán 1. Hago každé z čísel  $\{1, 2, \dots, 27\}$  priradil práve jednej malej kocke. Potom spočítal súčet týchto čísel pre každú trojicu kociek ležiacich na jednej priamke rovnobežnej s nejakou hranou kocky. Takto dostal 27 súčtov. Zistite, koľko najviac z týchto súčtov môže byť nepárnych.

**Úloha 5.15** (KMS 12/13-Z3-11). V KMS je  $n$  vedúcich. Každý z nich obľubuje iný druh ovocia a iný druh zeleniny. Iniciatívny redaktor Denníka P zistil, kto vedúcuje KMS a aké druhy ovocia a zeleniny sú v obľube. Chcel urobiť prehľadnú tabuľku, v ktorej by bolo napísané, ktoré ovocie a zelenina patrí ktorému vedúcemu. Začal sa pýtať vedúcich, či v tabuľke k sebe patria dvojice položiek<sup>1</sup>. Na každú otázku dostal odpoveď nie. Koľko najmenej otázok musel redaktor položiť, aby mohol jednoznačne vyplniť tabuľku?

**Úloha 5.16** (KMS 13/14-Z1-5).

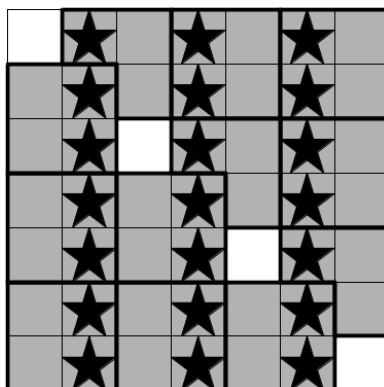
**Úloha 5.17** (KMS 13/14-Z1-8). Nakoľko najmenej ťahov možno zaručene vyhrať pexeso obsahujúce  $2n$  kartičiek nech je na začiatku rozložené akokoľvek?

**Úloha 5.18** (KMS 10/11-Z1-11). Palacinkového cesta nikdy nie je dosť. Vďaka tomuto heslu ho Kubo navyrábal toľko, že sa mu ledva zmestilo do 40 hrncov (tie si musel požičať aj od susedov). Hanke sa to vôbec nepáčilo. Nie to, že toho cesta bolo tak veľa, ale to, že Kubo cesto rozdelil úplne nerovnomerne. Hanka to chcela napraviť. Rozhodla sa, že hladinu cesta v hrncoch bude vyrovnávať nasledovným spôsobom. Zoberala si vždy  $n$  hrncov a poprelievala medzi nimi cesto tak, aby vo všetkých  $n$  hrncoch bolo rovnako veľa cesta. Toto opakovala dovtedy, kým dosiahla vo všetkých 40 hrncoch rovnakú hladinu cesta. Kubo sa zamyslel, aké najmenšie môže byť takéto  $n$ , aby sa to Hanke podarilo bez ohľadu na počiatočné rozloženie palacinkového cesta v hrncoch. Zistite to aj vy.

## Náznaky riešení

**1.2** Práve  $n$ : Treba streliť na všetky biele políčka. Do každého štvorca  $2 \times 2$  musia ísť aspoň dva výstrely.

Nepárne  $n$ : Vystrelíme do každého druhého stĺpca. Tabuľku pokryjeme štvorcami  $2 \times 2$  (do ktorých musia ísť aspoň dva výstrely) a L-lodičkami (aspoň jeden výstrel). Pokrytie tabuľky  $7 \times 7$  je znázornené na obrázku. Pri zovšeobecnení odporúčam opísať zdôvodnenie, prečo menej výstrelův nestačí, pomocou matematickej indukcie. Opíšeme pokrytie prvých dvoch stĺpcov a prvých dvoch riadkov štvorcami  $2 \times 2$  a L-kom a na zvyšný štvorec  $(n-2) \times (n-2)$  použijeme matematickú indukciu – z indukčného predpokladu tam musí byť minimálne  $(n-2)(n-3)/2$  výstrelův.



**1.3** Najviac možno vyťať 2500 stromov.

Rozdeľte si mriežku na štvorcečky  $2 \times 2$ . Z každého štvorcečku možno vyťať najviac jeden strom. Ak vytneme z každého štvorcečka strom vpravo hore, na spojnici ľubovoľných dvoch pňov bude ležať strom.

**1.6** Najviac  $2^{n-1}$ . Konštrukcia: Každý vedúci pozná klebetu  $A$ , pre zvyšné klebety je  $2^{n-1}$  možností. Odhad: Rozdeľte klebety do dvojíc tak, aby žiadne dvojica neobsahovala dve rôzne klebety.

**1.7** Riešenie je 18 (aspoň dúfam, nad konštrukciou som sa nezamyslel, pôvodná úloha je ukázať, že 19 nemôže byť). Pre odhad rozdeľte kruh vhodne na 18 častí takých, že vzdialenosť každých dvoch bodov v nej je najviac 7 cm. 18 je deliteľné 6, začnite rozdelením kruhu na šesťiny.

**2.1** Riešenie je  $m+n-2$  (ak  $m \neq 1 \neq n$ ). Ak by išlo viac, zrátať počet červených a modrých políčok, vyjde to viac ako  $mn$ , čo sa nemôže stať.

<sup>1</sup>Napr. Obľubuje Vodka mrkvu? Patrí zeler k baklažánu?

**3.3** Je to  $2n-1$ . Odhad indukciou. Odstráňte z plotu s  $n+1$  farbami farbu  $A$  takú, že vzdialenosť jej najľavejšieho a najpravejšieho výskytu je čo najväčšia. Plot sa nám rozdelí na  $r+1$  úsekov, v ktorých je postupne  $f_0, f_1, \dots, f_r$  farieb. Ukážte, že každý úsek obsahuje iné farby, preto je plot dlhý najviac

$$(2f_0) + (2f_1 - 1) + (2f_2 - 1) + \dots + (2f_{r-1} - 1) + (2f_r) + r = 2(f_0 + f_1 + \dots + f_r) - (r - 1) + r = 2n + 1.$$

Prvý a posledný úsek môže obsahovať 0 farieb, kedy je plot dlhý najviac 0, nie  $-1$ , čo vychádza z výrazy  $2f_0 - 1$ , resp.  $2f_r - 1$ . Preto sú tieto výrazy nahradené  $2f_0, 2f_r$ , aby tu odhad platil aj pre 0 farieb. Nakoniec pripočítavame  $r$ , čo je počet latiek natretých odstránenou farbou  $A$ .

**3.4** Riešenie:  $n^2/4$ , resp.  $(n^2 - 1)/4$ . Treba aspoň toľko: dve polovice, v rámci nich sa nikto nepozná a medzi polovicami sa poznajú všetci. Stačí to: indukciou, odstráňte dvoch domorodcov, ktorí sa poznajú.

**4.3** Pri tejto úlohe príde vhod počítanie správnych vecí. Napr. aby vyšli deliteľnosti, počet  $L$  musí byť  $4k + 3$ . Okrem toho tu pomôže vhodné ofarbenie políčok tabuľky. Nájdite také ofarbenie tabuľky, aby každá kachlička pokryla najviac jedno ofarbené políčko. Potom viete povedať, že kachličiek musí byť aspoň toľko, čo ofarbených políčok. Pri hľadaní takýchto ofarbení sa inšpirujte úlohami o lodičkách. Sústreďte sa na kachličku  $S$ ,  $L$ -ko je na to škaredé.

Ofarbite 16 políčok: všetky, čo sú v nepárnom riadku a zároveň v nepárnom stĺpci. Treba teda aspoň 16 kachličiek.  $S$  musí byť len jedno, ak by bolo viac, bolo by pokrytých priveľa políčok.

**5.3** Riešenie je menšie, ako by sa zdalo. Skúste označiť jeden kľúč a rozlíšiť jeho susuedov.

Okrem malých prípadov stačia dve farby. Napr. pre  $n = 8$  vieme kľúče zafarbiť takto MZMMZZZZ.

**5.5** V druhej časti úlohy skúmajte, ako vzdialené môžu byť čísla 1 a 16 a pozrite sa na políčka medzi nimi.

V prvej časti úlohy stačí čísla zaradom napísať do tabuľky po riadkoch. V druhej časti úlohy môžu byť čísla 1 a 16 vzdialené:

1. 5 políčok (jedno je v rohu a druhé susedí s rohovým políčkom) – ktoré čísla musia vtedy byť na ceste medzi nimi?
2. 6 políčok (v protiahlych rohoch) – ktoré čísla musia byť na uhlopriečke? A ktoré čísla tesne nad uhlopriečkou?