

Kombinatorika

Jozef Rajník, Prípravné sústredenie pred IMO a MEMO, 6. 6. 2017

Texty k jednotlivým témam a ďalšie úlohy nájdete v Zbierke KMS, ďalej seriáloch PraSe a aj v niektorých uplynulých sériách, užitočné materiály možno nájsť aj v ich knižnici.

kms.sk/zbierka

<http://mks.mff.cuni.cz/archive/archive.php> – Seriály a série PraSe

<http://mks.mff.cuni.cz/library/DirichletuvPrincipDS/DirichletuvPrincipDS.pdf> – materiál o Dirichletovom princípe aj s mnohými úlohami

Riešenia úloh so zdrojom možno nájsť v archívoch KMS alebo PraSe, pri cudzokrajinných olympiádach možno ich nájsť (v angličtine) na stránke https://artofproblemsolving.com/community/c13_contests. V prípade nejasností mi môžete napísať mail na j.rajnik@gmail.com.

1 Matematická indukcia

Úloha 1.1. Je daná štvorčeková tabuľka rozmerov $2^n \times 2^n$, pre prirodzené číslo n , v ktorej je jeden štvorček zafarbený na čierne. Dokážte, že ju vieme vydláždiť pomocou L-triomín tak, aby čierne políčko ostalo jediné nepokryté.

Úloha 1.2 (IMO 2002, úloha 1). Nech n je kladné celé číslo a nech T je množina všetkých bodov (x, y) v rovine, kde x a y sú celé nezáporné čísla a $x + y < n$. Každý bod z množiny T je ofarbený buď červenou, alebo modrou farbou. Ak je bod (x, y) červený, sú červené aj všetky body $(x', y') \in T$, pre ktoré platí $x' \leq x$ a $y' \leq y$. Nech X je počet spôsobov, ako môžeme vybrať n modrých bodov tak, že všetky ich x -ové súradnice sú rôzne a nech Y je počet spôsobov, ako môžeme vybrať n modrých bodov tak, že všetky ich y -ové súradnice sú rôzne. Dokážte, že platí $X = Y$.

Úloha 1.3 (KMS 06/07, 1. zimná séria, úloha 11). Na ostrove žije n domorodcov. jedného dňa náčelník rozhodol, že všetci (vrátane neho) si urobia a budú nosiť náhrdelník zložený z 0 alebo viac jednofarebných kamienkov. Dvaja domorodci majú mať aspoň jeden kameň rovnakej farby práve vtedy, keď sú priatelia.

a) Dokážte, že domorodci môžu splniť náčelníkov rozkaz.

b) Aký je minimálny počet farieb kamienkov potrebný na to, aby sa dal splniť náčelníkov rozkaz bez ohľadu na priateľské vzťahy na ostrove?

Úloha 1.4 (PraSe 19. ročník, 2. séria, 7. úloha). Majme dve postupnosti prirodzených čísel $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, kde $m, n \in \mathbb{N}$. Dokážte, že $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n)$ práve vtedy, keď existuje taká postupnosť $t = (t_1, \dots, t_k)$, že x je n/k -krát zopakovaná postupnosť t a y je m/k -krát zopakovaná postupnosť t .

Úloha 1.5 (KMS 02/03, 1. letná séria, úloha 11). Nech S je podmnožina $m + n$ mrežových bodov v obdĺžniku $m \times n$. Každé dva body (ktoré môžu byť) sú spojené vodorovnou alebo zvislou čiarou (rovnobežnými so stranami obdĺžnika). Dokážte, že sa tam musí nachádzať uzavretá lomená čiara z tých spojníc.

Úloha 1.6 (IMO 2009, úloha 6). Nech $a_1, a_2, \dots, a_n$ sú navzájom rôzne kladné celé čísla a M je množina $n - 1$ kladných celých čísel neobsahujúca číslo $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Lúčny koník skáče pozdĺž číselnej osi, pričom začína v bode 0 a urobí smerom doprava n skokov s dĺžkami $a_1, a_2, \dots, a_n$ v nejakom poradí. Dokážte, že poradie skokov sa dá zvoliť tak, aby lúčny koník nepristál na žiadnom čísle z množiny M .

2 Dirichletov princíp

Úloha 2.1. Máme postupnosť 47 celých čísel $a_1, a_2, \dots, a_{47}$. Dokážte, že z nich vieme vybrať súvislú (neprázdnu) podpostupnosť, ktorej súčet všetkých členov je deliteľný 47-mi. Súvislá podpostupnosť je postupnosť $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+j}$, pre $1 \leq i \leq 47, j \geq 0$.

Úloha 2.2. Dokážte, že spomedzi 9 bodov v priestore s celočíselnými súradnicami vieme vybrať dva body také, že ich stred má celočíselné súradnice.

Úloha 2.3 (KMS 15/16, 3. zimná séria, úloha 5). Na šachovnici 8×8 je rozmiestnených 25 veží. Dokážte, že z nich vieme vybrať 4 tak, aby sa žiadne dve z nich neohrozovali.

Úloha 2.4. Dokážte, že medzi ľubovoľnými ôsmimi zloženými prirodzenými číslami menšími ako 361 existujú vždy dve čísla, ktoré majú spoločného deliteľa.

Úloha 2.5 (PraSe 2000/01, 3. séria, úloha 3). Mesto New York sa skladá zo 151 severovýchodných a 151 východozápadných ulíc, ktoré tvoria pravidelnú štvorčekovú sieť o hrane 100 metrov (šírku ulíc zanedbávame). V uliciach mesta je 11 401 telefónnych búdok. Ukážte, že existuje dvojica telefónnych búdok vzdialená najviac 200 metrov chôdze po ulici.

Úloha 2.6 (Rusko 2000). Tabuľka 100×100 je rozdelená na jednotkové štvorčeky, ktoré sú zafarbené štyrmi farbami tak, že v každom stĺpci a v každom riadku je z každej farby 25 políčok. Dokážte, že existujú dva riadky a dva stĺpce také, že štyri políčka na ich prieniku majú rôzne farby.

Úloha 2.7. Máme plánik 100×100 políčok. Na každom políčku je šípka, ktorá ukazuje vľavo, hore, vpravo alebo dole. Plánik je ohraničený stenou okrem pravej strany. Na jedno políčko plániku položíme robota. Ten sa každú sekundu pohne z políčka, na ktorom stojí na susedné políčko v smere šípky. Táto šípka sa následne otočí o 90 stupňov v smere hodinových ručičiek. Ak robot nemôže spraviť pohyb naznačovaný šípkou, ostane na mieste, avšak šípka pod ním sa otočí. Je možné, že robot nikdy neopustí plánik?

Úloha 2.8 (PraSe 2000/01, 3. séria, úloha 4). Šachista Dominik sa chystá na dôležitý turnaj. Na tréning má 76 dní a každý deň chce zahrať aspoň jednu partiu, celkom však nie viac než 132. Dokážte, že v niektorých po sebe idúcich dňoch, odohral presne 21 partíí.

Úloha 2.9 (OMM 1998). Strany a uhlopriečky pravidelného osemuholníka sú zafarbené modrou a červenou. Ukážte, že medzi čiarami možno nájsť aspoň 8 jednofarebných trojuholníkov, ktorých vrcholy sú vo vrcholoch osemuholníka.

Úloha 2.10 (IMO 1964). 17 ľudí si píše maily každý s každým. Každá dvojica diskutuje práve o jednej z troch tém. Ukážte, že existujú tri osoby, ktoré diskutujú o tej istej téme.

Úloha 2.11. Máme za sebou v nejakom poradí napísané čísla 1, 2, ..., 101. Dokážte, že z nich vieme vyškrtnúť 90 z nich tak, aby zvyšných 11 čísel tvorilo rastúcu alebo klesajúcu postupnosť.

3 Teória grafov

Tvrdenie 3.1 (Handshaking lemma). Súčet stupňov v každom grafe je párny.

Tvrdenie 3.2. Každý strom (na aspoň dvoch vrcholech) má aspoň dva listy.

Tvrdenie 3.3. Každý strom na n vrcholech má $n - 1$ hrán.

Tvrdenie 3.4. Graf neobsahujúci cyklus má najviac $n - 1$ hrán.

Tvrdenie 3.5. Pre graf G sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné.

- G je strom, t. j. súvislý graf bez cyklov.
- Každé dva vrcholy v G sú spojené práve jednou cestou.
- G je súvislý graf s $n - 1$ hranami.
- G neobsahuje cykly, avšak po pridaní ktorejkoľvek hrany už cyklus vznikne.
- G je súvislý, avšak po odobratí vrcholu sa rozdelí na dva komponenty.

Tvrdenie 3.6. Graf obsahuje eulerov ťah (uzavretý ťah cez všetky hrany) práve vtedy, keď je súvislý a všetky jeho stupne sú párne.

Úloha 3.1 (KMS 20015/16, 2. letná séria, úloha 6). Desať vedúcich KMS je zmrzlinu. Každý z nich má medzi nimi práve 6 kamarátov (kamarátstvo je vzájomné). Zmrzlina obsahuje presne 120 porcií. Vedúci však majú len jednu lyžičku, preto jedia nasledujúcim spôsobom: ten, kto má lyžičku, zje jednu porciu zmrzliny a podá lyžičku nejakému svojmu kamarátovi. Toto sa opakuje, až kým nezjedia celú zmrzlinu. Dokážte, že ak má na začiatku lyžičku ľubovoľný vedúci, tak vedúci zjedia zmrzlinu tak, aby každý zjedol 12 porcií.

Úloha 3.2. Pre dané prirodzené číslo n nájdite najväčšie číslo k také, že možno do kruhu napísať postupnosť núl a jednotiek dĺžky k takú, že žiadna n -tica sa tam nevyskytuje dvakrát.

Tvrdenie 3.7. Graf je bipartitný práve vtedy, keď neobsahuje cyklus nepárnej dĺžky.

Tvrdenie 3.8. Nech G je bipartitný graf s partíciami A, B . Grafe G má perfektné párenie práve vtedy, keď ľubovoľná podmnožina množiny A má aspoň toľko susedov ako prvkov.

Úloha 3.3. V grafe G na n vrchoch má každý vrchol stupeň aspoň $(n-1)/2$. Dokážte, že graf G je súvislý.

Úloha 3.4 (Kazachstan 2003). Dané sú dva štvorcové kusy papiera, každý s obsahom 2003. Každý papier je rozdelený na 2003 mnohouholníkov s obsahom 1 (rozdelenia môžu byť rôzne). Jeden kus papiera položíme na druhý. Dokážte, že môžeme pomocou 2003 špendlíkov prepichnúť všetkých 4006 mnohouholníkov.

Tvrdenie 3.9. V úplnom orientovanom grafe existuje cesta cez všetky vrcholy.

Úloha 3.5. Nech G je taký graf, v ktorom každý vrchol má stupeň aspoň 3. Dokážte, že graf G obsahuje cyklus párnej dĺžky.

Úloha 3.6. Nech G je graf na n vrchoch obsahujúci viac ako $n^2/4$ hrán. Dokážte, že graf G obsahuje trojuholník (cyklus dĺžky 3).

Úloha 3.7 (USAMO 1989). 20 hráčov tenisu odohralo 14 zápasov tak, že každý hráč hral aspoň raz. Ukážte, že existuje 6 hier, v ktorých hralo 12 rôznych hráčov.

Úloha 3.8 (Peru 2009). Okolo okrúhleho stola sedí $2n$ Slovákov, $2n$ Čechov a $2n$ Poliakov. Ľudia, čo sedia medzi dvoma ľuďmi rovnakej národnosti sa postaví. Aký najväčší počet ľudí sa môže postaviť?

Úloha 3.9 (OMM 2009). Na párty je n osôb. Vieme, že medzi ľubovoľných štyroch osôb existujú tri osoby, ktoré poznajú každá s každou alebo existujú tri osoby, medzi ktorými sa žiadne dve nepoznajú. Dokážte, že ich vieme rozdeliť na dve skupiny, kde v jednej skupine sa budú všetci poznať a v druhej skupine sa nikto nebude poznať.

Úloha 3.10 (Bulharsko 2004). V skupine n turistov medzi ľubovoľnými tromi turistami existujú dvaja, čo sa nepoznajú. Prepokladajme, že bez ohľadu na to, ako ich rozdelíme do dvoch autobusov, v aspoň jednom autobuse budú aspoň dvaja turisti, čo sa poznajú. Ukážte, že existuje turista, ktorý pozná najviac $\frac{2}{3}n$ zvyšných turistov.

4 Invarianty a hry

Úloha 4.1. V rade na stole je n kariet otočených lícom nahor. V jednom ťahu si môžeme vybrať ľubovoľné dve a otočiť ich. Určte, pre ktoré n sa môžeme po konečnom počte ťahov dostať do stavu, kedy sú všetky karty lícom nadol.

Úloha 4.2. Na tabuli sú napísané čísla od 1 do 1 000 000, každé práve raz. Každé číslo zotrieme a nahradíme ho jeho ciferným súčtom. Tento proces opakujeme, až kým na tabuli nezostanú len jednociferné čísla. Ktorých čísel ostane na tabuli najviac?

Úloha 4.3 (KMS 03/04, Z1, 5). Na ostrove v Tichomorí žijú chameleóny troch farieb: žlté, zelené a hnedé. Keď sa stretnú dva chameleóny rôznych farieb, oba sa prefarbia na tretiu farbu. V istom momente bolo na ostrove 13 žltých, 15 zelených a 17 hnedých chameleónov. Je možné, aby bolo po istom čase všetkých 45 chameleónov rovnakej farby? (Predpokladáme, že sa žiadny nový nenarodí, ani žiaden neumrie.)

Úloha 4.4. Nech n je prirodzené číslo. Uvažujme postupnosť čísel $1, 2, \dots, n$. V jednom kroku môžeme v nej vymeniť dve (rôzne) čísla. Možno po 2017-tich krokoch dostať pôvodnú postupnosť?

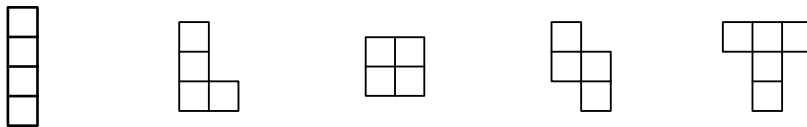
Úloha 4.5. Na obvode kruhu sú napísané za sebou čísla $1, 0, 1, 0, 0, 0$. V jednom kroku môžeme dve susedné čísla zväčšiť o 1. Môžeme po niekoľkých krokoch dostať na obvode kruhu všetky čísla rovnaké?

Úloha 4.6 (KMS 15/16, Z2, 7). Na každom políčku tabuľky $n \times m$ je lampa. Na začiatku sú všetky lampy vypnuté. V každom ťahu si môžeme vybrať v riadku alebo stĺpci m po sebe idúcich lúč a zmeniť stav týchto lúč (zo zapnutej na vypnutú a naopak). Dokážte, že stav, v ktorom sú všetky lampy zapnuté, vieme dosiahnuť práve vtedy, keď číslo m je deliteľom čísla n .

Úloha 4.7. Na z oboch strán nekonečnom rade políček je rozmiestnených konečne veľa kameňov. Ak sa na nejakom políčku nachádzajú aspoň dva kamene, môžeme z tohto políčka zobrať dva kamene a položiť po jednom z nich na dve susedné políčky. Existuje počiatočné rozmiestnenie kameňov také, že po nenulovom konečnom počte spomenutých ťahov je možné dostať počiatočné rozloženie?

Úloha 4.8. V tabuľke $n \times n$ je $n - 1$ infikovaných políček. Každú sekundu sa infikujú všetky políčka, ktoré susedia (stranou) s aspoň dvomi infikovanými políčkami. Ukážte, že jedno políčko vždy ostane neinfikované.

Úloha 4.9. Pre každý typ tetromina určte, či ním možno vydláždiť plochu 10×10 .



Úloha 4.10 (OMCC 2001). Marián a Dávid si sadli za okrúhly stôl s 2 017 stoličkami a idú hrať hru o prežitie. V každom ťahu, hráč odstráni od stola jednu susednú stoličku. Pokiaľ na tejto stoličke sedel jeho súper, tak hráč na ťahu vyhráva. Hru začína Marián a následne sa strieda s Dávidom v ťahoch. Určte, ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu.

Úloha 4.11. Na stole je n zápaličiek, s ktorými hrajú Anastázia a Bronislava nasledujúcu hru. V každom ťahu jedna z hráčok odstráni zo stola 1, 3, 4, 5 alebo 7 zápaličiek. Začína Anastázia a následne sa s Bronislavou striedajú v ťahoch. Hráčka, ktorá zoberie poslednú zápalku, vyhráva. V závislosti od kladného celého čísla n určte, ktorá z hráčok má víťaznú stratégiu.

Úloha 4.12. Na každom políčku tabuľky 8×8 je lampa. Na začiatku sú všetky lampy zhasnuté. V jednom ťahu si vyberieme jednu lampu a jeden smer (buď zvislý, alebo vodorovný) a prepne vybranú lampu a všetkých jej susedov v danom smere. Po istom počte takýchto ťahov ostala svietiť práve jedna lampa. Nájdite všetky možné pozície tejto lampy.

Úloha 4.13 (APMO 2007). Na každom políčku tabuľky 5×5 je zhasnutá lampa. V jednom kroku si môžeme vybrať lampu a vybranú lampu spolu so všetkými lampami na susedných políčkach prepnúť. Po niekoľkých krokoch nám ostala svietiť jedna lampa. Nájdite všetky políčka, na ktorých to mohlo byť.

Úloha 4.14. V tabuľke 4×4 môžeme presúvať štvorčeky na voľné miesto. Môžeme tak z konfigurácie naľavo dostať konfiguráciu napravo?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Úloha 4.15 (USAMO 1994). Strany pravidelného 99-uholníka sú korálovou (K), modrou (M) a sivou (S) v poradí KMKMKM...KMS. V jednom kroku môžeme zmeniť farbu strany na inú, pokiaľ tak nevzniknú dve susedné strany s rovnakou farbou. Môžeme po konečnom počte krokov dostať zafarbenie KMKMKM...KSM?

Úloha 4.16 (IMO 2004). Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel (m, n) takých, že tabuľku $m \times n$ možno vydláždiť kachličkami:

