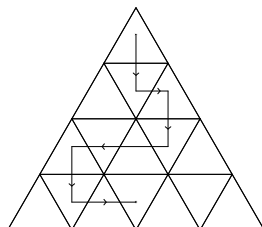


Kombinatorika — niekoľko štvoriek z KMS

Jozef Rajník

Úloha 1. Anina sa ocitla v bludisku. Bludisko má tvar rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky n a je rozdelené na sieť rovnostranných trojuholníčkov s dĺžkou strany 1. Anina sa nachádza v najvyššom trojuholníčku a potrebuje sa dostať na stredný trojuholníček v najspodnejšom riadku. Môže sa pohybovať len cez stredy hrán trojuholníčkov dole, doprava alebo doľava, pričom sa nesmie vrátiť do trojuholníčka, v ktorom už bola. (Vyjsť z veľkého trojuholníka nemôže.) Pre každé prirodzené číslo n určte, koľkými spôsobmi môže Anina prejsť bludiskom. Na obrázku je znázornené bludisko pre $n = 4$ a jedna možná cesta bludiskom. [KMS 2015/16 1L-4]



Úloha 2. Luxusko si objednal ku svojim meninám sadu n luxusných závaží s hmotnosťami $1! \text{ kg}$, $2! \text{ kg}$, $3! \text{ kg}$, $\dots$, $n! \text{ kg}$.¹ Koľko rôznych hmotností vie Luxusko pomocou nich odvážiť na rovnoramenných váhach? Závažia môže dávať na obe strany. [KMS 2015/16 3L-4]

Úloha 3. Územie Kocúrkova má tvar pravidelného n -uholníka. Starosta Kocúrkova chce rozdeliť jeho územie na trojuholníky, ktoré majú vrcholy vo vrcholoch n -uholníka a aspoň jednu spoločnú stranu s n -uholníkom. Koľkými spôsobmi to vie urobiť? [KMS 2015/16 1Z-4]

Úloha 4. V New Yorku sú obľúbené štvorčekové siete. Preto aj kvetinový záhon v Central Parku má tvar štvorčekovej siete $m \times n$ políčok. V každom políčku rastie jeden typ kvetiny – nezáporné celé číslo. Takýto záhon sa nazýva *záhradou*, ak sú splnené nasledujúce dve podmienky:

- Rozdiel čísel na dvoch políčkach, ktoré susedia stranou, je 0 alebo 1.
- Ak je číslo v nejakom políčku menšie alebo rovné ako číslo na všetkých políčkach susediacich stranou, tak je rovné 0.

V závislosti od kladných celých čísel m a n určte, koľkými spôsobmi môžu byť v záhone vysadené kvety, aby tvoril záhradu. [KMS 2016/17 1L-9²]

¹Zápis $k!$ označuje súčin prirodzených čísel od 1 po k , teda $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$. Napríklad $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

²Je to síce úloha 9, ale aspoň tu má číslo 4.