

Kombinatorika cez programovanie

Jozef Rajník, Letná škola matematiky, 27. 7. 2023

1 Zoznámenie sa s Pythonom

Úloha 1. Vypíšte všetky celé čísla:

- a) od 0 do 100,
- b) od 1 do 100,
- c) 1, 4, 7, ..., 100 (teda každé tretie počnúc 1 končiac 100).

2 Základné kombinatorické pravidlá

Úloha 2. Vypíšte všetky a) dvojciferné, b) trojciferné čísla zložené z cifier 1, 3, 4, 9.

Úloha 3. Vypíšte všetky 6-znakové slová zložené z písmen m, f, i.

Úloha 4. Morzeova abeceda používa najviac 4-znakové slová zložené so znakov . a -. Vypíšte všetky takéto možné slová.

Úloha 5. Vypíšte všetky párne 5-ciferné čísla zložené z cifier 1, 2, 3, 5, 8, 9, v ktorých sú prvé dve cifry rovnaké.

Úloha 6. Vypíšte všetky a) 2, b) 3, c) 4-ciferné čísla zložené z cifier 1, 2, 3, 5, 8, 9, v ktorých sa neopakujú cifry.

Úloha 7. Vypíšte všetky 7-znakové slová zložené z písmen a, b, c, d, ktoré obsahujú práve jedno písmeno a.

Úloha 8. Vypíšte všetky 7-znakové slová zložené z písmen a, b, c, d, ktoré obsahujú aspoň jedno písmeno a.

3 Variácie a permutácie

Úloha 9. Napíšte funkciu, ktorá dostane ako parameter zoznam / množinu M a číslo k . Funkcia vráti všetky k -prvkové postupnosti zložené z prvkov M .

Takéto postupnosti nazývame *variácie s opakovaním k -tej triedy prvkov množiny M* . Ich počet je

$$|M|^k$$

V Pythone na ich výpis vieme použiť funkciu `product(M, repeat=k)`, kde M je množina / zoznam prvkov a keyword argument k je dĺžka chcených postupností. Riešenie úlohy 2b) vyzerá tak nasledovne:

```
from itertools import product

for a, b, c in product({1, 3, 4, 9}, repeat=4):
    print(a, b, c, sep='')
```

Úloha 10. Napíšte funkciu, ktorá dostane ako parameter zoznam / množinu M a číslo k . Funkcia vráti všetky k -prvkové postupnosti zložené z prvkov M , v ktorých sa prvky neopakujú.

Takéto postupnosti nazývame *variácie bez opakovania k -tej triedy prvkov množiny M* . Ich počet je

$$|M|^k = \underbrace{|M|(|M| - 1)(|M| - 2) \dots (|M| - k + 1)}_{k \text{ členov}} = \frac{|M|!}{k!}$$

Špeciálnym prípadom variácií bez opakovania sú *permutácie*, v ktorých vyberáme všetky prvky množiny M .

V Pythone na ich výpis vieme použiť funkciu `product(M, repeat=k)`, kde M je množina / zoznam prvkov a keyword argument `k` je dĺžka chcených postupností. Riešenie úlohy 2b) vyzerá tak nasledovne:

```
from itertools import permutations

for a, b, c in permutations({1, 2, 3, 4, 5}, 3):
    print(a, b, c, sep='')
```

4 Kombinácie (bez opakovania)

Úloha 11. Vypíšte všetky spôsoby ako vybrať a) dvojicu, b) trojicu týždenníkov z 9 žiakov.

Kombinácie k -tej triedy prvkov množiny M sú všetky jej k -prvkové podmnožiny, teda také výbery k prvkov, v ktorých nám nezáleží na poradí a prvky nemôžeme vyberať opakovane. Pri názve kombinácie štandardne berieme, že ide o kombinácie bez opakovania. Ich počet označujeme

$$\binom{|M|}{k}$$

a čítame $|M|$ nad k .

Úloha 12. Napíšte funkciu `komb(M, k)`, ktorá dostane ako parameter množinu / zoznam M a číslo k . Funkcia vráti všetky kombinácie k prvkov z M .

```
from itertools import combinations

for a, b in combinations({1, 2, 3, 4}, 2):
    print(a, b, sep='')
```

Úloha 13. Vypíšte všetky podmnožiny množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Úloha 14. Koľko existuje 10-znakových slov zložených iba z písmen a) A, B; b) A, B, C, ktoré obsahujú presne 7 znakov A?

Úloha 15. Vypíšte spôsoby, ako možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky 5×5 dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby v každom riadku bolo rovnako veľa bielych a čiernych políčok?

Úloha 16. Koľko existuje rôznych slovných prešmyčiek slova MATEMATIKA?

V nasledujúcich úlohách budeme pracovať s obmedzenou sadou žolíkových kariet (preto, nech nemáme zbytočne veľké počty možností). Každá karta má svoju *farbu*, ktorá je z množiny $\{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$, a *hontou*, ktorá je z množiny $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Z každej možnej kombinácie existuje práve jedna karta. Pod *pokrovou kombináciou* myslíme ľubovoľnou množinu 5 kariet.

Úloha 17. Vypíšte všetky pokrové kombinácie *streight flush*, teda také tvorené postupkou piatich kariet rovnakej farby.

Úloha 18. Vypíšte všetky pokrové kombinácie *trojica a dvojica*, teda také tvorené trojicou kariet rovnakej hodnoty a dvojicou kariet rovnakej hodnoty.

Úloha 19. Vypíšte všetky pokrové kombinácie *dva páry*, teda také tvorené dvojicou kariet hodnoty x , dvojicou kariet hodnoty y a poslednou kartou hodnoty z , pričom x, y, z sú navzájom rôzne.

Úloha 20. Vypíšte všetky spôsoby ako rozsadiť n žien a n mužov okolo okrúhleho stola a) bez ďalších obmedzení b) tak, aby dvaja muži nesedeli vedľa seba. Ak možnosti, ktoré sa líšia len otočením, považujeme za rovnaké.

Úloha 21. Koľko existuje rôznych slovných prešmyčiek slova MATEMATIKA?

5 Kombinácie s opakovaním

Úloha 22. V obchode predávajú keksíky piatich druhov. Vypíšte spôsoby, ako vieme kúpiť a) dva keksíky, b) osem keksíkov. Na poradí kúpených keksíkov nám nezáleží a jeden druh keksíku môžeme kúpiť aj opakovane.

Výbery k prvkov množiny M , pri ktorých môžeme prvky vyberať opakovane, ale nezáleží nám na poradí, sa nazývajú *kombinácie s opakovaním k -tej triedy prvkov množiny M* . Ich počet je

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

V Pythone ich vieme generovať nasledovne

```
from itertools import combinations_with_replacement

for a, b, c in combinations_with_replacement({1, 2, 3, 4}, 3):
    print(a, b, c, sep=' ')
```

Úloha 23. Vypíšte všetky spôsoby ako môže rozdeliť kráľ 30 dukátov medzi 6 sluhov. Dukáty sú navzájom nerozlíšiteľné.

Úloha 24. Vypíšte všetky riešenia nerovnice

$$t + r + o + j + s + e + n \leq 17$$

v obore nezáporných celých čísel.

6 Ďalšie úlohy

Úloha 25. Koľko existuje 7-ciferných čísel (v desiatkovej sústave), ktorých cifry sú

- a) v klesajúcom poradí,
- b) v rastúcom poradí,
- c) v nerastúcom poradí,
- d) v neklesajúcom poradí.

Úloha 26. Poker sa hrá s 52 kartami: $2, 3, \dots, 10, J, Q, K, A$, každá z 13 hodnôt v štyroch farbách. *Pokrovú kombináciu* tvorí päť kariet bez ohľadu na poradie. Určte, koľkými spôsobmi možno vybrať

- a) pokrovú kombináciu bez žiadnych obmedzení;
- b) *straight flush* – postupka piatich kariet rovnakej farby;
- c) štyri karty s rovnakým číslom;
- d) *full house* – tri karty s číslom x a dve karty s číslom $y \neq x$;
- e) *flush* – všetky karty rovnakej farby;
- f) *straight* – postupka piatich kariet ľubovoľnej farby;
- g) *trojicu* kariet rovnakej hodnoty a zvyšné dve inej hodnoty, navzájom rôznej;
- h) *dva páry* kariet rovnakej hodnoty (navzájom však rôznej)
- i) *pár* kariet rovnakej hodnoty a zvyšné dve iných navzájom rôznych hodnôt

Úloha 27. Vypíšte spôsoby, ako možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky 5×5 dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby bol v každom riadku párny počet bielych políčok?