

Kombinatorika – Delenie na časti

Jozef Rajník, Kvalifikácia MO, 17. 1. 2025

j.rajnik@gmail.com

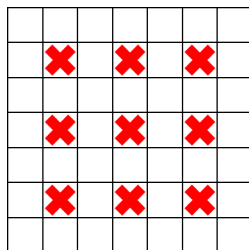
1 Úvod – ako neriešiť takéto úlohy

Prednášku začneme trochu netradične – miesto toho, aby sme si ukázali, ako sa majú úlohy riešiť, tak si ukážeme, ako sa riešiť nemajú. K nasledovnej úlohe uvedieme dve nesprávne riešenia. Skúste sa nad nimi zamyslieť (aspoň nad prvým) a identifikovať, kde v nich je chyba. Pokúste sa aj túto chybu vysvetliť – neuspokojte sa s argumentáciou: „Riešenie je zlé, lebo sa to má riešiť takto,“ alebo „Výsledok je iný, preto je to zlé.“

Môžete si tiež skúsiť túto úlohu vyriešiť. Pokojne mi pošlite mail s nájdenými chybami a vašim riešením, nech vám to viem odkontrolovať.

Úloha 1.1. Na pláne 7×7 ukrytá loď 2×3 . Na koľko najmenej políčok musíme vystreliť, aby sme ju s istotou aspoň raz zasiahli?

Pokus o riešenie 1. Neoplatí sa nám strieľať na kraj, keďže v strede pokryjeme viac pozícií lode. Tiež sa nám neoplatí sa nám dávať výstrely vedľa seba, lebo keď sú ďalej od seba, tak pokryjú viac možných pozícií lode. Avšak nechceme strieľať s medzerou dvoch políčok, lebo môže byť medzi nimi loď. Optimálne je preto strieľať s rozstupom jedného políčka. Najmenej výstrelův je preto 9, ako je vyznačené na obrázku 1. Výstreli sú rozmiestnené rovnomerne podľa pravidiel, ktoré sme ukázali. Ak by sme použili o jeden výstrel menej, tak už by sme niekde vedeli umiestniť loď. $\square$



Obr. 1

Pokus o riešenie 2. Pre každé políčko spočítame počet pozícií lodí, ktoré by sme trafili výstrelom naň (tabuľka vľavo). Aby sme dosiahli čo najmenej výstrelův, tak musíme streliť na políčko, kde zasiahneme čo najviac možných lodí – teda 12. Takých políčok je viac, preto je optimálne streliť do stredu.

2	4	5	5	5	4	2
4	8	10	10	10	8	4
5	10	12	12	12	10	5
5	10	12	12	12	10	5
5	10	12	12	12	10	5
4	8	10	10	10	8	4
2	4	5	5	5	4	2

2	4	5	5	5	4	2
4	8	9	8	9	8	4
5	9	8	3	8	9	5
5	8	3	X	3	8	5
5	9	8	3	8	9	5
4	8	9	8	9	8	4
2	4	5	5	5	4	2

		X		X		
	X				X	
			X			
	X				X	
		X		X		

Potom si znovu prepočítame počet lodí, ktoré zasiahneme na jednotlivých políčkach (tabuľka v strede). Najviac vieme pokryť 9 pozícií lodí, a to na ôsmich políčkach. Dokonca tieto políčka sú rozmiestnené rovnomerne okolo stredu. Ak vystrelíme na všetky z nich (tabuľka vpravo), tak tým pokryjeme všetky možné pozície lode. Keďže sme vždy vyberali políčka, ktoré pokrývajú najväčší možný počet pozícií lode, tak tento počet je najmenší možný. $\square$

Potom si ukážeme správne riešenie tejto úlohy. Možno ju vyriešiť celkom všeobecnou technikou – problém si rozdelíme na správne časti, na ktorých vieme úlohu vyriešiť a potom tieto čiastkové úvahy spojíme do finálneho výsledku.

2 Úlohy na prednášku

Na ukázanú techniku si potom prejdeme niekoľko úloh. Budeme prechádzať nasledovné, hoci zrejme nestihneme úplne všetky.

Úloha 2.1. Koľko najviac jazdcov (koňov) možno umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 2.2. Vedúci KMS radi klebetia a každý z nich pozná niekoľko klebiet. Všetci dokopy poznajú 5 klebiet. Opäť žiadni dvaja nepoznajú presne tie isté klebety. Koľko najmenej vedúcich musí obsahovať KMS, aby zaručene existovali dvaja vedúci taký, že jeden vedúci pozná všetky klebety druhého vedúceho?

Úloha 2.3. (*) Vyriešte predošlú úlohu pre situáciu, kedy vedúci poznajú dokopy n klebiet.

Úloha 2.4 (KMS 17/18-3Z-9). (*) Linoleum na podlahe jedálne tvorí štvorčekovú mriežku $m \times n$ štvorčekov. V každom štvorčeku sa nachádza jeden stôl. Osvetlenie jedálne zabezpečujú lampy, ktoré sa nachádzajú v niektorých mrežových bodoch mriežky (vrátane tých na obode, všetkých mrežových bodov je teda $(m+1)(n+1)$). Každá lampa osvetľuje stoly na tých štvorčekoch, v ktorých rohoch sa nachádza. V závislosti od prirodzených čísel m, n nájdite najmenší počet lúčpotrebných na to, aby každý stôl bol osvetlený aspoň dvomi lampami.

Úloha 2.5 (MEMO 2023 T3). (*) Nájdite najmenšie celé číslo b s nasledujúcou vlastnosťou: Pre každé ofarbenie práve b políčok na šachovnici rozmerov 8×8 na zeleno je možné umiestniť 7 strelcov na 7 zelených políčok tak, aby sa žiadni dvaja strelci neohrozovali.

Nižšie v dokumente nájdete bohatú sadu úloh. Sú rozdelené podľa tém a v rámci každej témy zoradené zhruba podľa obtiažnosti. Náročné úlohy sú označené (*). Keďže je úloh veľa, tak šípku je označený výber úloh, na ktoré sa oplatí pozrieť. Túto sadu som ani nepripravoval s cieľom, aby si každý prešiel všetko, ale aby ste mali do zásoby aj úlohy na ďalšie precvičovanie a tiež nech si tu vie každý nájsť úlohy primeranej náročnosti.

3 Úlohy na dôkaz existencie

Úloha 3.1. Dokážte, že z ľubovoľných štyroch celých čísel vieme vybrať dve čísla, ktorých rozdiel je deliteľný tromi.

Úloha 3.2. Dokážte, že medzi ľubovoľnými 12-timi rôznymi celými dvojcifernými číslami nájdeme dve, ktorých rozdiel je dvojciferné číslo s oboma ciframi rovnakými.

- Úloha 3.3.** Spomedzi čísel 1, 2, ..., 100 vyberieme ľubovoľných 52 čísel. Dokážte, že zakaždým možno spomedzi nich vybrať dve čísla, ktorých súčet je deliteľný stomi.
- Úloha 3.4.** Dokážte, že spomedzi ľubovoľných 52 celých čísel možno zakaždým vybrať dve čísla, ktorých súčet alebo rozdiel je deliteľný stomi.
- Úloha 3.5.** Spomedzi čísel 1, 2, ..., 42 vyberieme 22 čísel. Dokážte, že sme zaručene vybrali dve čísla, ktoré sa líšia práve o 1.
- Úloha 3.6.** Vo vnútri rovnostranného trojuholníka o strane dĺžky 2 sa nachádza päť bodov. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dvojicu bodov, ktoré sú od seba vo vzdialenosti nanajvýš 1.
- Úloha 3.7.** Vlk zje každý deň aspoň jednu ovcu, no najviac tri ovce. Medveď zje každý deň aspoň štyri ovce, no najviac sedem oviec. Dokážte, že v každom týždni existujú dva dni, keď bača utrpí rovnakú škodu (teda príde o rovnaký počet oviec).
- **Úloha 3.8.** Dokážte, že na každej párty sú dvaja ľudia, ktorí poznajú rovnako veľa ostatných ľudí z párty.
- **Úloha 3.9.** Dokážte, že medzi 6-timi ľuďmi vždy existujú traja takí ľudia, že každý pozná každého alebo nikto nepozná nikoho.
- Úloha 3.10.** V priestore máme 9 bodov s celočíselnými súradnicami. Dokážte, že existujú dva body, ktorých ťažisko má celočíselné súradnice.
- Úloha 3.11.** V rovine je daných 13 bodov s celočíselnými súradnicami. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať tri body, ktorých ťažisko má celočíselné súradnice.
- **Úloha 3.12** (PraSe 94/95, [1]). Dokážte, že vo štvorci s rozmermi $6\text{cm} \times 6\text{cm}$, kde je zakreslených 37 bodov, existuje štvorec $2\text{cm} \times 2\text{cm}$, ktorý obsahuje aspoň päť z daných bodov.
- Úloha 3.13.** Na štvorcovom stole $1\text{m} \times 1\text{m}$ sedí 151 múch. Dokážte, že hrncom s polomerom $1/7\text{ m}$ dokážeme zabiť sedem múch jednou ranou.
- **Úloha 3.14** (IMO 1964, úloha 1). 17 ľudí si píše maily každý s každým. Každá dvojica diskutuje práve o jednej z troch tém. Ukážte, že existujú tri osoby, ktoré diskutujú o tej istej téme.
- Úloha 3.15** (PraSe 2000/01-3-3, [1]). Mesto New York sa skladá zo 151 severojužných a 151 východozápadných ulíc, ktoré tvoria pravidelnú štvorčekovú sieť s hranou malého štvorčeka 100 metrov (šírku ulíc zanedbávame). V uliciach mesta je 11 401 telefónnych búdok. Ukážte, že existuje dvojica telefónnych búdok vzdialená najviac 200 metrov chôdze po ulici.
- **Úloha 3.16** (IMO 1972, úloha 1). Máme 10 dvojciferných čísel. Dokážte, že z nich vieme vybrať dve disjunktné množiny s rovnakým súčtom.
- Úloha 3.17** (PraSe 2000/01, 3. séria, úloha 4). (*) Šachista Dominik sa chystá na dôležitý turnaj. Na tréning má 76 dní a každý deň chce zahrať aspoň jednu partiu, celkom však nie viac než 132. Dokážte, že v niekoľkých po sebe idúcich dňoch, odohral presne 21 partií.
- Úloha 3.18.** Pre Fibonacciho čísla platí $F_1 = F_2 = 1$ a $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ pre všetky prirodzené čísla k . Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n existuje Fibonacciho číslo, ktoré sa končí na n núl.
- **Úloha 3.19.** Máme postupnosť 48 celých čísel. Dokážte, že z nej vieme vybrať súvislú podpostupnosť, ktorej súčet je deliteľný 47-mi. Platí to aj pre postupnosť 47 celých čísel?
- Úloha 3.20** (IMO 1985, úloha 4). (*) Máme daných 1985 kladných celých čísel takých, že žiadne z nich nemá prvočíselného deliteľa väčšieho ako 23. Dokážte, že medzi nimi existujú 4 čísla, ktorých súčin je štvrtou mocninou celého čísla.

Úloha 3.21. (*) [MO59-A-III-2] Kruhový terč s polomerom 12 cm zasiahlo 19 výstrelů. Dokážte, že vzdialenosť niektorých dvoch zásahov je menšia ako 7 cm.

Úloha 3.22. (*) [MO61-A-III-3] Dokážte, že medzi ľubovoľnými 101 reálnymi číslami existujú dve čísla u a v , pre ktoré platí

$$100|u - v| \cdot |1 - uv| \leq (1 + u^2)(1 + v^2)$$

Úloha 3.23 (Rusko 2000). (*) Tabuľka 100×100 je rozdelená na jednotkové štvorčeky, ktoré sú zafarbené štyrmi farbami tak, že v každom stĺpci a v každom riadku je z každej farby 25 políčok. Dokážte, že existujú dva riadky a dva stĺpce také, že štyri políčka na ich prieniku majú rôzne farby.

Úloha 3.24 (Peru 2009). (*) Na schôdzi sa zúčastnilo 100 poslancov z troch krajín. Niektoré dvojice poslancov sa navzájom poznajú. Ukážte, že na schôdzi sú dvaja poslanci A , B rôznych krajín takí, že existuje 17 poslancov z tretej krajiny, ktorí buď poznajú všetci oboch poslancov A , B , alebo každý z nich sa nepozná ani s poslancom A , ani s poslancom B .

Úloha 3.25 (Tournament of towns 1985). (*) V Bumbálke je 32 študentov, ktorí sú zoskupení v 33 tajných matematických krúžkoch. Každý krúžok pozostáva z troch študentov a žiadne dva krúžky nemajú rovnaké zloženie. Dokážte, že existujú dva krúžky, ktoré majú práve jedného spoločného študenta.

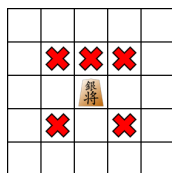
4 Úlohy o šachovnici

→ **Úloha 4.1.** Koľko najviac veží možno umiestniť na šachovnicu tak, aby sa žiadne dve neohrozovali?

→ **Úloha 4.2.** Koľko najviac strelcov možno umiestniť na šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 4.3. Koľko najviac kráľov možno umiestniť na šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 4.4 (KMS 20/21-Z3-5). Figúrka *strieborný generál* (pochádza z japonského šachu) ohrozuje štyri políčka, s ktorými má spoločný iba roh a jedno políčko priamo pred sebou (ako na obrázku 1). Figúrku možno otáčať do 4 smerov, pričom figúrka má vyznačené, na ktorej strane má predok (je tam zúžená). Najviac koľko strieborných generálov možno umiestniť na šachovnicu rozmerov 8×8 tak, aby žiaden strieborný generál neohrozoval iného?



Obr. 2: Políčka, ktoré ohrozuje strieborný generál.

→ **Úloha 4.5** (KMS 18/19-Z1-6). Figúrka *povýšený strelce* ohrozuje políčka, ktoré sa nachádzajú v rovnakej uhlopriečke (ako strelce v bežnom šachu) a navyše aj políčka, ktoré majú spoločnú hranu s políčkom, na ktorom povýšený strelce stojí. Koľko najviac povýšených strelcov možno umiestniť na šachovnicu rozmerov 9×9 tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali? A koľkých na šachovnicu $n \times n$?

Úloha 4.6. Koľko najmenej strelcov treba umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby sme spomedzi nich isto vedeli vybrať troch strelcov tak, aby sa navzájom neohrozovali, a to ani potom, čo nevybraných strelcov dáme preč?

Úloha 4.7. Nájdite najmenšie číslo n , pre ktoré platí nasledovné tvrdenie: Z ľubovoľného rozmiestnenia n kráľov na šachovnici 8×8 možno vybrať piatich, z ktorých sa žiadni dvaja neohrozuju. Správnosť vášho tvrdenia dokážte.

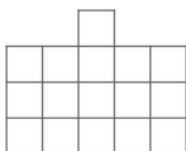
→ **Úloha 4.8** (KMS 15/16-Z3-5, upravené). Koľko najmenej veží musíme umiestniť na šachovnicu rozmerov 8×8 , aby sme z nich vedeli vybrať 4 veže, z ktorých sa žiadne dve neohrozuju, a to ani potom, čo nevybrané veže dáme preč.

5 Lodičky

Úloha 5.1. Na pláne 8×8 políčok sa nachádza loď rozmerov 1×2 (vodorovne alebo zvislo otočená). Na koľko najmenej políčok musíme vystreliť, aby sme loď s istotou zasiahli aspoň raz?

Úloha 5.2. Koľko najmenej výstrelů treba na zasiahnutie lode rozmerov 1×3 na plániku 7×7 ?

Úloha 5.3 (KMS 2020/21-Z2-2). Loď v tvare tetromina T na nasledovnom plániku



Úloha 5.4. Loď 1×3 na pláne rozmerov $n \times n$. Úlohu vyriešte pre

- a) $n = 6$, b) $n = 7$, c) $n = 5$, d) všeobecne pre n .

Úloha 5.5. Na pláne rozmerov $n \times n$ sa nachádza loď 1×4 (ľubovoľne otočená). Na koľko najmenej políčok musíme vystreliť, aby sme ju s istotou zasiahli?

Úloha 5.6 (Náboj 2015, 10). Loď rozmerov 1×5 na plániku 9×9 .

Úloha 5.7. Loď v tvare tetromina O na plániku $n \times n$.

→ **Úloha 5.8.** (*) Loď v tvare tetromina L na plániku $n \times n$.

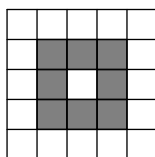
Úloha 5.9. Loď v tvare tetromina S na plániku $n \times n$.

→ **Úloha 5.10.** (*) Koľko najmenej výstrelů treba na zasiahnutie lode v tvare triomina L na plániku

- a) 6×6 , b) 8×8 , c) 7×7 , d) všeobecne $n \times n$?

Úloha 5.11. (*) Koľko najmenej výstrelů je potrebných na to, aby sme s istotou zasiahli loď rozmerov $1 \times \ell$ na pláne rozmerov $n \times n$? Výsledok určte v závislosti od n a ℓ .

Úloha 5.12 (MO70-B-I-6). Na pláne s rozmermi 12×12 štvorčekov sa nachádza loď tvorená ôsmimi políčkami pozdĺž obvodu štvorca 3×3 (na obr. je vyznačená sivou farbou). Na koľko najmenej políčok treba vystreliť, aby sme s istotou zasiahli loď aspoň raz?



6 Mix rôznych úloh

→ **Úloha 6.1.** Koľko najmenej čísel musíme vybrať z množiny $\{1, \dots, 20\}$, aby medzi vybranými číslami zaručene existovali dve, z ktorých jedno delí to druhé? Aký je výsledok pre množinu $\{1, 2, \dots, n\}$?

Úloha 6.2 (KMS 10/11-3L-7). Vedúci KMS radi klebetia a každý z nich pozná niekoľko klebiet. Každí dvaja vedúci poznajú aspoň jednu rovnakú klebetu. Navyše žiadni dvaja nepoznajú presne tie isté klebety (aj v prípade, že Kubko pozná len klebetu A a Maťko klebety A a B , hovoríme, že poznajú iné klebety). Koľko najviac vedúcich môže mať KMS, ak všetci dokopy poznajú práve 6 rôznych klebiet?

→ **Úloha 6.3.** Nájdite najmenšie také číslo k pre ktoré platí, že v každej k -prvkovej podmnožine množiny $\{1, 2, \dots, 100\}$ sa nachádzajú tri čísla, ktoré majú spoločnú cifru (spoločná cifra musí byť rovnaká pre všetky tri, ale môže v nich byť na rôznych pozíciách, napr. čísla 12, 31 a 17 majú spoločnú cifru 1, ale čísla 42, 47 a 27 nemajú spoločnú cifru). Vaše tvrdenie dokážte.

Úloha 6.4 (KMS 07/08-Z1-6). V štvorcom parku je do štvorcovej mriežky 100×100 umiestnených 10 000 stromov. Koľko z nich sa dá najviac vyťať tak, aby zo žiadneho pňa nebolo vidieť iný peň? Dokážte, že viac pňov sa už takto vyťať nedá.

Úloha 6.5 (PraSe 00/01, [1]). Hrací plán hry „Človeče, nezlob sa!“ pozostáva z 36 políček umiestnených do kruhu. Nájdite najmenšie také celé číslo n , že pri ľubovoľnom rozmiestnení n figúrok a ľubovoľnom hode kockou vieme pohybom nejakej figúrky vyhodíť inú.

Úloha 6.6 (PraSe 98/99-1-1, [1]). Nájdite čo najdlhšiu aritmetickú postupnosť prirodzených čísel s diferenciou 60, ktorá je tvorená samými prvočíslami.

Úloha 6.7 (Zovšeobecnenie KMS 2012/13-L1-8). Nájdite všetky kladné celé čísla n , pre ktoré vieme uložiť čísla 1 až n^2 do štvorčekovej siete $n \times n$ tak, aby v ľubovoľnom T-čku, zloženom zo štyroch políček, bol súčet čísel párny? T-čko môže byť aj otočené.

Literatúra

[1] Dávid Stanovský, Dirichletov princíp, dostupné na <https://prase.cz/library/DirichletuvPrincipDS/DirichletuvPrincipDS.pdf>

Náznaky riešení

Táto časť a aj nasledujúca časť s výsledkami je predbežná, neúplná a nie veľmi uprataná. Niekde nájdete aj celé riešenie úlohy alebo nie zrovna dobré hinty. Aj výsledok mohol nikde ujsť. Pokúsím sa to do prednášky viac upratať.

- 2.1.**
- Pri figúrok a podobných konštrukciách príde vhod uvažovať rôzne známe (či už z bežného života alebo olympiádnych úloh) ofarbenia políček – rozmiestnite jazdcov na políčka rovnakej farby bežného šachovnicového ofarbenia.
 - Chceme dokázať, že pri ľubovoľnom rozmiestnení 33 jazdcov existujú dvaja, ktorí sa ohrozujú. Takáto formulácia si pýta Dirichletov princíp. Resp. tu vieme využiť princíp delenia nášho problému (teraz šachovnice) na menšie, navzájom nezávislé časti. Ak rozdelíme šachovnicu na 32 navzájom ohrozujúcich sa skupín, tak v každej môže byť najviac jeden jazdec.

- 2.2.** $11 (= \binom{5}{2} + 1)$. Môžeme mať 10 vedúcich, kde každý pozná len dve klebety. Všetky možné množiny klebiet zoradíte do 10 radov, tak, aby v každom rade postupne vždy pribúdala jedna nová klebeta.
- 3.1.** Možné zvyšky sú len tri a máme štyri čísla.
- 3.2.** Čím je deliteľné dvojčiferné číslo s oboma ciframi rovnakými?
- 3.3.** Tvorte si dvojčky vyhovujúcich čísel. Rozmyslite si, že nevádi, ak nám malý počet čísel ostane osamote.
- 3.4.** Tvorte si dvojčky vyhovujúcich čísel. Rozmyslite si, že nevádi, ak nám malý počet čísel ostane osamote.
- 3.5.** Ak majú čísla navzájom rôzne zvyšky, je to v podstate predchádzajúca úloha. Čo ak niektoré dve čísla majú rovnaký zvyšok?
Úloha sa dá však riešiť rôznymi spôsobmi. Len upozorním, že niektoré spôsoby nie sú zrovna ľahké na poriadne spísanie.
- 3.6.** Rozdeľte si trojuholník strednými priečkami na štyri menšie trojuholníky.
- 3.7.** Spočítajte, koľko rôznych škôd môže bača utrpieť v daný deň.
- 3.8.** Uvedomte si, že na párty nemôže byť súčasne človek, čo nikoho nepozná, aj človek, čo pozná každého.
- 3.9.** Pre jedného človeka existujú traja ľudia, ktorých všetkých (ne)pozná.
- 3.10.** Pozrite sa na paritu súradníc. Koľkými spôsobmi môže byť nakombinovaná?
- 3.11.** Ukážte, že spomedzi 5 čísel možno vybrať 3, ktorých súčet je deliteľný tromi.
- 3.12.** Rozdeľte si štvorec na 9 menších štvorcov.
- 3.13.** Pokryte štvorec 25 kruhmi s polomerom $1/7$.
Pri hľadaní pokrytia môže prísť vhod 6-uholníková sieť.
- 3.14.** Dvojkrokový dirichlet. Zoberte si jedného človeka a pozrite sa na ľudí, s ktorými si píše o jednej téme.
- 3.15.** Rozdeľte si množinu bodov na uliciach do najviac 11 400 útvarov.
Zoberte si križovatku a do každého smeru 100 m ulice a pokryte takýmito útvarmi celý New York.
- 3.16.** Vyberte ľubovoľné dve podmnožiny s rovnakým súčtom a potom ich prerobte na disjunktné zachovajúc súčet.
- 3.17.** Uvažujte prefixové súčty $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ a ukážte, že existujú i a j také, že $s_i = s_j + 21$. Nevychádza dirichlet? Ako presne vyzerá taký prípad?
- 3.18.** Príde vhod dodefinovať si $F_0 = 0$. Sledujte dvojicu posledných dvoch Fibonacciho čísel po delení n .
- 3.19.** Pozrite sa na čísla $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{48}$. V programovaní sa postupnosť takýchto súčtov nazýva *prefixové súčty*. Áno, platí to aj pre 47 čísel.

- 3.20.** Urobte dvojkrokového dirichleta. Nájdite najprv dostatočne veľa štvorcov a z nich vyberte hľadanú štvrtú mocninu.
- 3.23.** Spočítajte dvojice políček, ktoré sú v rovnakom riadku a majú rôznu farbu. Vyberte dvojicu stĺpcov, kde je týchto dvojíc najviac.
- 3.24.** Spočítajte počet trojíc (A, B, C) takých, že A, B, C sú z rôznych krajín a buď A aj C poznajú B , alebo A ani C nepoznajú B .
- 3.25.** Ukážte, že jeden študent je v aspoň štyroch krúžkoch. Čo viete povedať o krúžkoch, v ktorých nie je?
- 4.1.** Rozdeľte si šachovnicu na riadky.
- 4.2.** Rozdeľte si šachovnicu na uhlopriečky smerujúce jedným smerom. Je ich až 15? Neviete dve spojiť do jednej?
- 4.3.** Rozdeľte si šachovnicu na štvorce 2×2 .
- 4.4.** 32, opäť si podelte políčka do dvojíc.
- 4.6.** Rozdeľte si šachovnicu po stĺpcoch.
- 4.8.** Rozdeľte si šachovnicu na 8 „uhlopriečok“ po 8 políček – ak uhlopriečka narazí na stranu štvorca, tak pokračuje z druhej strany.
- 6.1.** Rozdeľte čísla do skupín podľa najväčšieho nepárneho deliteľa, teda $a, 2a, 4a, 8a, 16a, \dots$. Áno, niektoré skupiny budú obsahovať len jedno číslo, napr. 17.
- 6.2.** $2^5 = 32$. Všetci vedúci poznajú tú istú klebetu. Prečo viac nejde? Každú podmnožinu klebiet spárujte s jej doplnkom.
- 6.4.** Rozdeľte si mriežku na štvorčeky 2×2 . Z každého štvorčeku možno vyťať najviac jeden strom. Ak vytňeme z každého štvorčeka strom vpravo hore, na spojnici ľubovoľných dvoch pňov bude ležať strom.
- 6.6.** Nájdite prvočíslo, ktoré bude deliť nejaký člen postupnosti. Sledujte zvyšky. Dobrým kandidátom je prvočíslo 7.
- 6.**
- Stačí iba rozlišovať, či je na políčku párne alebo nepárne číslo. Skúste sa pozrieť na parity čísel vo vhodnej malej časti siete.
 - Ukážte, že v každom „plusku“ zloženom z piatich políček musia mať čísla rovnakú paritu.

Výsledky

- 4.1.** 8
- 4.2.** 14
- 4.3.** 16
- 4.6.** 17

4.7. 17

4.8. 25

- 5.8. Riešením je $\lfloor n^2/3 \rfloor$ výstrelů (pre $n \geq 3$, inak je to zjavne 0). To dosiahneme tak, ako keď sme strieľali loď 1×3 , t. j. každú tretiu diagonálu. Poďme ukázať, že menej výstrelů nestačí. Kľúčovým pozorovaním je, že v každej oblasti 2×3 musia byť aspoň 2 výstrely – jeden výstrel nestačí ani ak je v rohu, ani ak je v prostrednom riadku / stĺpci. Začnime najprv menšími prípadmi. Hoci možno u nich vyskúšať všetky možnosti, ukážme si šikovnejšiu cestu, ktorá vie niekedy trochu pomôcť, keď bežné odhady nestačia.

$n = 3$: Ak by sme mali najviac dva výstrely, jeden riadok by musel byť prázdny. Potom musí byť výstrel na prvom a poslednom políčku v každom susednom riadku. Aby sme tak nedostali 4 výstrely, musí byť prázdny riadok pri okraji. To nám už ale jednoznačne určuje polohu dvoch výstrelů a na pláne sa môže nachádzať loď.

$n = 4$: Predpokladajme, že stačia 4 výstrely. V každej oblasti 2×3 musia byť aspoň 2 výstrely, preto v prvom stĺpci nesmie byť žiaden výstrel. Potom ale musí byť výstrel v každom políčku druhého stĺpca, inak by sa do prvých dvoch stĺpcov zmestila loď. Žiadne ďalšie výstrely už na pláne nemôžu byť, ale loď sa tam zmestí, čo je spor s tým, že 4 výstrely stačia.

$n = 5$: Plán 5×5 si rozdelíme na 4 oblasti 2×3 , v každej musia byť aspoň 2 výstrely, teda na celom pláne aspoň 8 výstrelů.

Ďalej budeme pokračovať matematickou indukciou. Budeme predpokladať, že pre každý plán $k \times k$, kde $k < n$, potrebujeme aspoň $\lfloor k^2/3 \rfloor$ výstrelů. Ukážeme, že tento odhad potom platí aj pre plán $n \times n$.

Ak $n = 3l$, tak plán rozdelíme na l^2 štvorcov 3×3 . V každom musia byť aspoň 3 výstrely, teda spolu máme aspoň $3l^2 = 9l^2/3 = n^2/3$ výstrelů.

Ak $n = 3l + 1$, tak plán rozdelíme ako na obrázku ?? . Dostali sme dva štvorce a dva obdĺžniky rozmerov $4 \times (3l - 3)$. Každý z nich si vieme rozdeliť na obdĺžniky 2×3 tvoriace mriežku $2 \times (3l - 3)$. Preto v jednom takomto obdĺžniku musí byť aspoň $6(l - 1)$ výstrelů. Spolu teda dostávame, že výstrelů musí byť aspoň

- 5.9. Riešením je $\lfloor n/2 \rfloor^2$. Taký počet výstrelů dosiahneme tak, že vystrelíme na tie políčka (i, j) , kde i a j sú obe párne. (Políčko (i, j) je políčko v i -tom riadku a j -tom stĺpci; číslujeme od 1.) Pre nepárne n zmestíme na plán požadovaný počet tetromín S: do každého obdĺžnika $2 \times n$ sa jednoducho vojde $(n - 1)/2$.

V obdĺžniku 2×4 musia byť aspoň 2 výstrely. Ak je n deliteľné 4, tak odhad získame rozdelením plánu na obdĺžniky 2×4 . Ak je $n = 4k + 2$, tak plán rozdelíme na obdĺžniky 2×4 a jeden štvorec 2×2 v ľavom dolnom rohu (obr. ??). Obdĺžnikov 2 tam máme $(n^2 - 4)/8$, teda potrebujeme aspoň $(n^2 - 4)/4 = n^2/4 - 1$ výstrelů. AK by toľko výstrelů stačilo, tak v štvorci 2×2 vľavo dole nesmú byť žiadne. Potom ale musia byť výstrely vo všetkých 4 políčkach, s ktorými má spoločnú hranu. Ale to by sa už v daných obdĺžnikoch 2×4 mohla nachádzať loď, keďže sú v nich už dva výstrely. Preto potrebujeme aspoň $n^2/4$ výstrelů, čo sme chceli ukázať.

6.1. 11

6.4. Najviac možno vyťať 2500 stromov.

- 6.5.** 19. 18 nestačí, ak dáme figúrky na striedačku a hodíme jednotku. Ak pohybom figúrky o k nevieme nič vyhodiť, tak každej figúrke priradíme voľné políčko.