

# Kombinatorika – Teória hier

Jozef Rajník, Kvalifikácia MO, 17. 1. 2025

j.rajnik@gmail.com

Ukážková úloha, na ktorej si demonštrujeme základné princípy

**Úloha 1.** Baška a Miško sa hrajú hru. Na začiatku majú kôpku  $n$  zápalek. Začína Baška a striedajú sa s Miškom v ťahoch. V každom ťahu z nej zoberie hráč

a) 1, 2, 3 alebo 4 zápalky;

b) 1, 3, 4 alebo 7 zápalek.

Prehráva hráč, ktorý nemôže spraviť ťah (teda sa dostane na ťah, keď sa už minuli zápalky). Ktorý hráč má víťaznú stratégiu?

Základné metódy riešenia úloh z teórie hier:

1. Analýza stavov hry odzadu – vyhrávajúce a prehrávajúce (príp. remízové) stavy. Odporúčame vzor, ktoré stavy hry sú aké a dokážeme.
2. Symetria: snažíme sa držať nepriateľa v symetrickej pozícii. To nám vie zaručiť, že vždy po ťahu nepriateľa vieme spraviť ťah aj my (symetricky). Buď v tejto symetrickej situácii začíname, kedy nás súper touto symetriou porazí; alebo si ju vieme vytvoriť prvým ťahom.

## Úlohy na precvičenie

Demonštratívna úloha na rozbeh

**Úloha 2** (KMS 16/17-Z3-4). Gertrúda a Pekelník hrajú hru na šachovnici rozmerov  $n \times n$ . Gertrúda začína, potom sa s Pekelníkom striedajú v ťahoch. V každom svojom ťahu položí hráč na ľubovoľné voľné políčko kameň. *Voľné políčko* je také, na ktorom nie je kameň a ktorého (hranou) susedné políčka obsahujú najviac jeden kameň. Hráč, ktorý vo svojom ťahu nemôže položiť kameň, prehráva. V závislosti od prirodzeného čísla  $n$  určte, ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu.

**Úloha 3** (Izrael 1995). Dvaja hráči hrajú piškovrky na nekonečnej štvorčekovej sieti. Vyhráva hráč, ktorý ako prvý umiesti 5 svojich symbolov do riadku alebo stĺpca (**pozor, nie do uhlopriečky!**).

**Úloha 4.** Dvaja hráči hrajú piškovrky na nekonečnej štvorčekovej sieti. Vyhráva hráč, ktorý ako prvý umiesti  $k$  svojich symbolov do riadku, stĺpca alebo uhlopriečky. Pre ktoré hodnoty  $k$  viete určiť, či má niektorý z hráčov vyhrávajúcu alebo neprehrávajúcu stratégiu?

**Úloha 5** (Rusko 2019, 10. ročník, 2). Alica a Bob sa hrajú hru. Začína Alica a následne sa s Bobom striedajú v ťahoch. Na začiatku hry majú veľký kus plastelíny. V jednom kole najprv Alica rozdelí jeden z kusov plastelíny na tri kusy ľubovoľnej veľkosti a potom Bob spojí dva kusy plastelíny do jedného. Alica vyhrá, pokiaľ sa v niektorý moment hry objaví 100 kusov plastelíny s rovnakými hmotnosťami. Vie Bob zabrániť Alici vyhrať?

**Úloha 6** (1999 USAMO). Juro a Ondro stroskotali na ostrove a teraz sa pretekajú v tom, kto zavolá skôr o pomoc. Na kreslili si do piesku mriežku  $1 \times 2000$  štvorčekov. Hráč vo svojom ťahu napíše do štvorčeka buď S, alebo O. Juro začína. Vyhráva hráč, po ktorom ťahu bude niekde v mriežke napísané SOS. Pokiaľ sa zaplní celá mriežka bez toho, aby sa to stalo, hra končí remízou.

**Úloha 7** (KMS 07/08-L1-11). Kružnica, rozdelená na  $n$  oblúkov bodmi postupne pomenovanými  $1, 2, 3, \dots, n$ , reprezentuje hraciu arénu pre dvoch hráčov, ktorí sa striedajú v ťahaní. V jednom ťahu si hráč vyberie dva zatiaľ voľné body (také, ktoré ešte nie sú koncom žiadnej úsečky) s rovnakou paritou a spojí ich úsečkou. Môže ale spojiť iba také body, aby novovzniknutá úsečka nepretínala žiadnu z predchádzajúcich úsečiek. Prehrá ten hráč, ktorý už nemôže spraviť ťah. Ak obaja hráči používajú optimálnu stratégiu, ktorý z nich vyhrá?

## Úlohy kus na iné kopyto

Nasledujúce úlohy, rôznych obtiažností, nie sú úplne to, čo by ste od teórie hier čakali. No napriek tomu je užitočné aj o takýchto vedieť.

**Úloha 8** (KMS 11/12-Z3-7). Petržlena s CéDečkom už prestalo baviť hrať piškvorky. Preto CéDečko vymyslel novú kartovú hru. V tejto hre je  $2n$  kariet položených na stole v rade za sebou. Na každej karte je zhora napísané prirodzené číslo. Jeden ťah spočíva v tom, že si hráč na ťahu zoberie kartu z kraja radu. Prvý ťahá CéDečko a ďalej sa s Petržlenom striedajú. Hra skončí, keď sa minú všetky karty na stole. Skóre hráča je súčet čísel na kartách, ktoré si potiahol. Dokážte, že CéDečko môže mať vždy aspoň také skóre ako Petržlen.

**Úloha 9** (PraSe, Seriál Teorie Her, Hra 10). Dvaja hráči začínajú s číslom 2 a striedajú sa v ťahoch. Hráč na ťahu pripočíta k aktuálnemu číslu niektorého kladného vlastného deliteľa. Hráč, ktorý ako prvý prekročí číslo 4247, prehrá. Ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu? A čo v prípade, že hráč, čo prekročí 4247 vyhrá?

**Úloha 10** (KMS 10/11-Z3-5). Na tabuli je narysovaných 5 kružníc, 7 štvorcov a 9 trojuholníkov, pričom žiadne dva z týchto útvarov nemajú spoločný bod. Marek a Paľo sa hrajú hru, v ktorej striedavo robia ťahy. Urobiť ťah znamená zotrieť ľubovoľné dva obrazce a nahradiť ich jedným novým. Nový útvar sa na tabuľu nakreslí tak, aby so žiadnym iným útvarom na tabuli nemal spoločný bod. V jednom ťahu možno nahradiť

- dve kružnice kružnicou,
- dva trojuholníky štvorcom,
- kružnicu a trojuholník trojuholníkom,
- dva štvorce trojuholníkom,
- kružnicu a štvorec štvorcom,
- štvorec a trojuholník kružnicou.

Paľo vyhrá, ak výsledkom bude štvorec. Marek vyhrá, ak na tabuli zostane trojuholník. Ukážte, pre ktorého hráča existuje víťazná stratégia, ak hru začína Marek. Popíšte túto stratégiu.

## Úlohy na precvičenie

**Úloha 11** (MO65-A-I-4). Nela s Janou zvolia prirodzené číslo  $k$  a následne hrajú hru s tabuľkou majúcou rozmery  $9 \times 9$ . Začínajúca Nela vždy vo svojom ťahu vyberie jedno prázdne políčko a vpíše doňho nulu. Jana vo svojom ťahu do nejakého prázdneho políčka napíše jednotku. Navyše po každom ťahu Nely nasleduje  $k$  ťahov Jany.

Ak sa kedykoľvek počas hry stane, že súčet čísel v každom riadku aj v každom stĺpci je nepárny, vyhrá Jana. Ak dievčatá vyplnia celú tabuľku bez toho, aby sa tak stalo, vyhrá Nela.

Nájdite najmenšiu hodnotu  $k$ , pre ktorú má Jana vyhrávajúcu stratégiu.

**Úloha 12** (Rusko 2017, 10. ročník, 3). There are 3 heaps with 100, 101, 102 stones. Ilya and Kostya play next game. Every step they take one stone from some heap, but not from same, that was on previous step. They make his steps in turn, Ilya make first step. Player loses if can not make step. Who has winning strategy?

**Úloha 13.** Domorodci Bruchopasník a Papľuh našli  $n > 1$  kusov jedla. Aby si ho rozdelili, hrajú s nimi nasledovnú hru.

Bruchopasník a Papľuh si napíšu do piesku všetky delitele čísla  $n$ . Hru začína Bruchopasník a následne sa hráči striedajú v ťahoch. Hráč v jednom svojom ťahu zmaže z piesku ľubovoľné číslo a spolu s ním všetky jeho násobky. Hráč, ktorý zmaže jednotku, prehráva. V závislosti od celého čísla  $n > 1$  určte, ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu

**Úloha 14** (KMS20/21-3Z-8). Na stole je viac ako  $n^2$  misiek, kde  $n$  je kladné celé číslo. Kubko sa s Jótaróm rozhodol zahrať si hru o to, kto vychlípe poslednú misku so šťavnatou rybou. Ako prvý bude chlípať Kubko a následne sa s Jótaróm striedajú v ťahoch. Hráč na ťahu musí vychlípať  $m$  misiek, pričom  $m$  spĺňa jednu z nasledujúcich podmienok:

- $m = 1$ ,
- $1 < m < n$  a zároveň  $m$  je prvočíslo,
- $m$  je násobkom čísla  $n$ .

Vyhráva ten, kto vychlípe špeciálnu poslednú misku so šťavnatou rybou. Kto má víťaznú stratégiu?

**Úloha 15** (KMS 07/08-Z1-10). Rasťo má na záhrade ešte stále vyrytú šachovnicu s  $2007 \times 2007$  políčkami. So sestrou Slávkou si povedali, že si zmerajú sily. Presne v strede šachovnice sa nachádza obrovský kameň, ktorý najprv Rasťo posunie o jedno políčko (rovnobežne so stranami šachovnice). Slávka ho potom bude musieť posunúť o dve políčka, Rasťo o štyri políčka, Slávka o osem políčok – v  $k$ -tom ťahu ho vždy budú musieť posunúť o  $2^{k-1}$  políčok. Ten, kto je na ťahu, prehráva, ak už nemôže posunúť kameň. Nájdite víťaznú stratégiu pre Slávku alebo pre Rasťa.

**Úloha 16** (KMS 11/12-L3-10). Kubo a Matúš zakopli o prirodzené číslo  $n$ , a tak sa rozhodli, že si zahrajú hru. V tejto hre budú striedavo písať jednu z čísl 0 alebo 1 na rolku toaletáka (nekonečného). Každý napíše svoju číslicu hneď za poslednú súperovu. Prehráva hráč, ktorý napíše číslicu, po ktorej sa na toaletáku objavia dve rovnaké  $n$ -tice za sebou idúcich čísl. Ukážte, že:

- a) Hra vždy skončí.
- b) Ak začína Kubo a  $n$  je nepárne, tak Matúš dokáže vyhrať, aj keby Kubo hral najlepšie ako dokáže.

**Úloha 17** (KMS 11/12-Z1-10). Petržlena už prestalo baviť hrať obyčajné piškvorky s CéDečkom. Preto si vymyslel inú hru, podobnú piškvorkám. Hrá sa na nekonečnom štvorčekovom papieri. Petržlen začína a označí nejaké neoznačené políčko krížikom, potom CéDečko označí nejaké neoznačené políčko krúžkom a takto sa ďalej striedajú. Vyhráva hráč, ktorého znak vyplní štvorec  $2 \times 2$ . Dokáže Petržlen vo svojej hre vždy vyhrať?

**Úloha 18** (KMS 08/09-Z3-14). Ondro a Feráč majú nekonečnú šachovnicu a hrávajú na nej nasledovnú hru. Každý hráč ovláda jedného koňa, Ondrejov začína na políčku  $(0, 0)$ , Feráčov na  $(X, Y)$ . Hráči sa striedajú v ťahoch, prvý ťahá Feráč. V jednom ťahu je dovolené spraviť ľubovoľný (nenulový) počet normálnych šachových krokov pre koňa, všetky však musia byť presne v tom istom smere a vzájomná euklidovská vzdialenosť medzi oboma koňmi sa musí každým krokom zmenšiť. Hráč prehrá vtedy, keď nemôže spraviť žiadny krok. Predpokladajte, že obaja hráči hrajú optimálne. Kto vyhrá?

**Úloha 19** (IMO 2015 Shortlist, C4). Let  $n$  be a positive integer. Two players  $A$  and  $B$  play a game in which they take turns choosing positive integers  $k \leq n$ . The rules of the game are:

- (i) A player cannot choose a number that has been chosen by either player on any previous turn.
- (ii) A player cannot choose a number consecutive to any of those the player has already chosen on any previous turn.
- (iii) The game is a draw if all numbers have been chosen; otherwise the player who cannot choose a number anymore loses the game.

The player  $A$  takes the first turn. Determine the outcome of the game, assuming that both players use optimal strategies.

**Úloha 20** (IMO Shortlist 2014 C8). Domčo a Mišo hrajú hru. Na stole je rozprestrených 1024 kariet. Na každej karte je nejaké množina cifier desiatkovej sústavy tak, že žiadne dve karty nemajú rovnakú množinu (teda jedna karta je prázdna). Najprv hráči striedavo berú po jednej karte zo stola, Domčo začína. Potom každý hráč zahodí práve jednu svoju kartu. Pokiaľ jednému hráčovi ostanú také karty, že každá cifra sa nachádza na párnom počte jeho kariet, tak ten hráč vyhráva. Pokiaľ sa to však stane obom hráčom, tak je remíza. Dokážte, že prvý hráč má víťaznú stratégiu. Ktorú kartu môže zobrať ako prvý?

## Nápovedy k riešeniam

2. Pre párne  $n$  vyhráva Pekelník – stačí mu hrať stredov symetricky ako Gertrúda. Pre nepárne  $n$  vyhrá Gertrúda. Ako by vedela svojim prvým ťahom vyrobiť symetrickú pozíciu?
7.
  - Úloha sa dá ľahko skúšaním vyriešiť pre  $n$  zhruba do 10. Pritom sa dá odpozorovať, ako asi bude vyzeráť výsledok. Tiež by ste si mohli všimnúť, že pre istú skupinu  $n$ -iek má prvý hráč víťaznú stratégiu.
  - Pre  $n = 4k$  vyhrá prvý hráč – spojí dva protiľahlé body a hrá symetricky na druhej polovici ako súper. Všimnite si, čo potrebujete na takúto symetrickú hru a skúste podobné stratégie nájsť aj v ďalších prípadoch. Pamätajte, že vaše úvahy by mali pokryť aj pozície, kde nie sú body zafarbené striedavo.
  - Pre  $n = 4k + 3$  to vyzerá, že prvý má víťaznú stratégiu. Pekným víťazným ťahom vyzerá spojenie  $2k + 1$  a  $2k + 3$ . Skúste si všimnúť, akú vlastnosť má konfigurácia, ktorú teraz dostaneme. Využite pri tom stredovú súmernosť.
  - Uvažujte dva špeciálne prípady, čo sa môže stať po zobrazení kruhu s párnym počtom bodov (rozmiestnených rovnomerne) v stredovej súmernosti. Čo ak sa kruh zobrazí na seba? Čo ak sa tým vymenia farby všetkých bodov?
  - Ukážte, že v prvom prípade máme vyhrávajúcu pozíciu a v druhom prehrávajúcu.
8.
  - Vedel by si CéDečko nejako zaručiť, aké čísla si vlastne zoberie?
  - Áno vedel. Vhodne si rozdeľte čísla na dve polovice, aby CéDečko vel zobrať takú, ktorej súčet nie je menší ako druhej.
  - Ofarbite si karty striedavo bielou a čiernou farbou a hrajte za CéDečka tak, aby nútil Petržlena brať len tú horšiu farbu.

9.
  - Začnite si kresliť schému hry, *zo začiatku*. Je číslo 6 vyhrávajúce či prehrávajúce?
  - To nevieme (teda ak sa moc nenudíme a nerozoberieme to celé :)). No prvý hráč vie v oboch prípadoch tomu prispôbiť stratégiu. Tým pádom vyhráva v oboch variantoch hry.
10.
  - Táto hra má zaujímavú vlastnosť – vždy v nej vyhrá Paľo, bez ohľadu na to, ako obaja hráči hrajú. To možno dokázať nájdením vhodného invariantu.
  - Skúmajte rozdiel počtu štvorcov a počtu trojuholníkov na tabuli. Ukážte, že jeho zvyšok po delení tromi sa nemení. Teda na konci musí byť tento rozdiel 1, teda rovnaký ako je na začiatku.
15.
  - Analyzujte od konca hry, ktoré pozície sú v posledných ťahoch víťazné a ktoré prehrávajúce.
  - Rasťo vie svoj ťah o  $2^8 = 256$  políčok spraviť vždy tak, aby umiestnil Slávku do prehrávajúcej pozície.
16.
  - Ako by asi mohol Kubo hrať? Priamy nápad, čo sa tu ponúka je symetria, tak ju skúste.
  - Naozaj zafunguje, keď Kubo píše vždy opačné číslo ako Matúš. Predpokladajte, že Kubko nejakým ťahom napíše  $n$ -ticu, ktorá sa už raz vyskytla. Pozrite sa na tieto dva výskyty, rozoberte, kto musel napísať ktorý znak, ktoré znaky musia byť rovnaké a ukážte že nejaká  $n$ -tica sa musela zopakovať už po Matúšovom poslednom ťahu.
17.
  - Nedokáže. Nájdite spôsob, ako má CéDečko odpovedať na Petržlenove ťahy.
  - Vhodne si podvojíte políčka. CéDečko dá krúžok vždy do druhého políčka vo dvojici. Takto doshaneme, že každá dvojica bude mať jeden krúžok. Stačí teda zaručiť, že každý štvorec obsahuje aspoň jednu takúto dvojicu.
18.
  - Čím je určená herná pozícia? Iba vzdialenosťou dvoch koní. Preto môžeme hru zjednodušiť tak, že obaja hráči hýbu tým istým koňom.
  - Keďže herná pozícia je určená len pozíciou koňa, s ktorým sa hrá, možno každému políčku priradiť, či je vyhrávajúce alebo prehrávajúce – pod'te na to a všímajte si veci.