

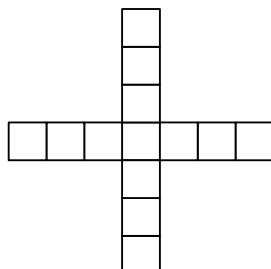
Optimalizačné úlohy

Optimalizačné úlohy v Matematickej olympiáde vedia byť niekedy zákerné. To si názorne ukážeme na nasledujúcej úlohe, na ktorej si aj vysvetlíme, čo taká optimalizačná úloha je.

Skúste si vyriešiť nasledovné úlohy samostatne.

Úloha 1. Koľko najviac obdĺžnikových dlaždíc 1×4 možno bez prekryvania umiestniť do štvorca 7×7 ?

Úloha 2. Koľko najviac dlaždíc 1×4 možno bez prekryvania umiestniť do štvorčekovej siete ako na obrázku?



Teraz uvedieme niekoľko riešení úlohy 1. Zhodnoťte, nakoľko sú správne.

Pokus o riešenie 1

Obdĺžnik 7×7 má plochu 49 a obdĺžnik 1×4 má plochu 4. Vieme teda zmestiť $49/4 = 12,25$ dlaždíc. Keďže však nemôžeme obdĺžniky rezať, tak výsledok zaokrúhlime nadol. Najviac vieme umiestniť 12 obdĺžnikov.

Pokus o riešenie 2

Začnime obdĺžniky umiestňovať vodorovne jeden pod druhý z ľavého horného rohu. Takto umiestnime 7 obdĺžnikov a ostane nám vedľa obdĺžnik 7×3 . Doňho vieme ešte umiestniť 3 dlaždice zvislo (pozri obrázok). Ostane nám štvorec 3×3 , do ktorého už nevieme umiestniť ďalšiu dlaždicu. Najviac vieme umiestniť 10 dlaždíc.

Pokus o riešenie 3

Začnime obdĺžniky umiestňovať vodorovne jeden pod druhý z ľavého horného rohu. Ak umiestnime 7 obdĺžnikov, tak nám ostane vedľa obdĺžnik 7×3 . Doňho vieme ešte umiestniť len 3 dlaždice zvislo (pozri obrázok). Celkovo umiestnime 10 dlaždíc. Skúsme, či sa neoplatí začať s umiestnením menšieho počtu dlaždíc. Aby sme optimálne využili aj zvislé dlaždice, tak z ľavého horného rohu umiestnime len 3 vodorovné dlaždice. Potom nám ostane priestor s výškou 4, do ktorého vieme umiestňovať dlaždice zvislo. Poďme ich teda znovu umiestňovať. Opäť ich však použijeme len 3, aby sme mohli tento postup opakovať. Takto v štyroch krokoch umiestnime po 3 dlaždice, teda celkovo 12 dlaždíc. Oplatilo sa teda striedať orientácie dlaždíc po troch, aby sme optimálne využili priestor a ostal nám len štvorec 1×1 .

Uvideli ste niekde vaše riešenie? Ak áno, tak vás sklameme, lebo žiadne z nich nebolo úplné. Poďme si ich postupne rozobrať.

Najjednoduchšie vidno, že riešenie 2 je nesprávne. V riešení 3 totiž vidíme, že sa dá umiestniť až 12 dlaždíc, preto 10 nemôže byť najviac. Riešenie 1 vyzerá „najviac matematicky“, lebo k výsledku prišlo výpočtom a nie nejakými „divnými slovnými postupmi“. Ako však vieme, že takýto výpočet by mal viesť k správne riešeniu? To vo všeobecnosti nie je pravda, ako môžeme vidieť na úlohe 2. Tam máme 13 políčok, čiže výpočtom by sme dostali $13/4$, čo sú po zaokrúhlení nadol 3 dlaždice. Avšak ani dve dlaždice sa nám do útvaru nezmestia.

Riešenie 3 vyzerá sľubne, no vo svojej podstate je totiž písané rovnako ako riešenie 2: skúsili sme nejakú dlaždicu umiestniť a dospeli sme k nejakému počtu. Ako vieme, že neexistuje nejaký iný spôsob umiestňovania

dlaždíc, ktorým by sme ich umiestnili až 13? Toto v riešení nie je spomenuté. Odpoveď na túto otázku je však jednoduchá – je to výpočet z riešenia 1. Po jeho doplnení už dostaneme úplné riešenie.

Aby sme sa uistili o úplnosti nášho zdôvodňovania, je dobré sa pýtať otázku: „Čo nám táto časť vraví o výsledku úlohy?“ Výsledkom tejto úlohy je jedno prirodzené číslo. Čo nám o výsledku vraví výpočet $49/4 = 12,25$? Môže byť výsledkom 15 dlaždíc? Nie, lebo toľko sa tam nezmesť. Môže byť výsledkom 9? Prečo nie? Pokojne môže, to sme zatiaľ nevyvrátili. Touto úvahou o obsahoch sme zdôvodnili, že výsledok nemôže byť väčší ako 12, musí teda byť niektorým z čísel $0, 1, 2, \dots, 11, 12$. Tomuto hovoríme, že sme získali *horný odhad*.

Čo ukazuje o výsledku ukázanie rozmiestenia 12 dlaždíc? Môže byť výsledok 10? Nemôže, lebo vieme umiestniť viac dlaždíc. Ukazuje nám teda, že výsledok musí byť aspoň 12, teda že sa nachádza medzi číslami $12, 13, 14, \dots$. Získali sme teda *dolný odhad*. Zamyslíme sa nad tým, že ako zdôvodníme, že 12 dlaždíc možno umiestniť bez prekryvania? K tomu nám stačí nakresliť len obrázok (samozrejme, ako to zvládame – napr. štvorec so stranou milión alebo n by sme asi nezvládli nakresliť). Nemusíme teda opisovať, ako sme dlaždice umiestnili a už vôbec nie slepé cesty. Spojením týchto dvoch úvah dostaneme, že výsledok musí byť 12, lebo zvyšné hodnoty sme vylúčili.

To, čo sme tu videli, platí o riešení každej optimalizačnej úlohy. Jej riešenie by sa malo skladať z dvoch častí

Štruktúra riešení optimalizačných úloh

Ak máme v úlohe nájsť najväčšie číslo k , pre ktoré platí $\dots$, tak ideálne riešenie vyzerá nasledovne:

Ukážeme, že hľadané najväčšie číslo je m :

1. Ukážme, že hľadané číslo je aspoň $m \dots$
2. Ukážme, že hľadané číslo nemôže byť väčšie ako $m \dots$

Ak máme hľadať najmenšie číslo, tak je štruktúra analogická. Teraz uvedieme stručné, vzorové riešenie úlohy 1, na ktorom demonštrujeme túto štruktúru.

Riešenie úlohy 1

Ukážeme, že najviac možno umiestniť 12 dlaždíc.

Na obrázku vidíme rozmiestnenie 12 neprekývajúcich sa dlaždíc, čiže 12 dlaždíc umiestniť vieme.

Jedna dlaždica má obsah 4 a celý štvorec má obsah $7 \cdot 7 = 49$. Ak by sme umiestnili 13 alebo viac dlaždíc, tak súčet ich obsahov by bol aspoň $13 \cdot 4 = 52$, čo je viac ako obsah celého štvorca – spor. Preto viac ako 12 dlaždíc umiestniť nevieme.

Úloha 3. Ako sa zmení riešenie úlohy 1, ak uvažujeme štvorčekovú sieť 7×7 políček a dlaždice môžeme umiestňovať len tak, aby zakryli štyri celé políčka?

Riešenie

Riešenie by bolo rovnaké. Avšak neplatí to úplne o každom. Ak by sme argumentovali tým, že každá dlaždica zakrýva 4 políčka, tak toto tvrdenie by už neplatilo pri krivo umiestnenej dlaždici (resp. by bolo nejasné, čo znamená zakrývať políčko – myslíme úplne zakryté, čiastočne alebo v súčte čo sa týka obsahov).

Úloha 4. Koľko najviac obdĺžnikov 1×4 možno bez prekryvania umiestniť do štvorčekovej siete rozmerov 10×10 ? Obdĺžniky musíme pokladať tak, aby zakryli štyri celé políčka siete.

Úloha 5. Zhodnoťte správnosť nasledovných riešení predošlej úlohy, ktoré sú uvedené na ďalšej strane. Ktoré úvahy a závery z nich sú správne a ktoré nesprávne?

Úloha 6. Máme niekoľko kladných celých čísel, nie nutne rôznych. Vieme, že ich možno rozložiť na 3 skupiny s rovnakým súčtom a aj na 4 skupiny s rovnakým súčtom.

- a) Aký najmenší súčet môžu mať tieto čísla?
- b) Aký je najmenší počet čísel s takouto vlastnosťou.

Úloha 7. Určte a) najväčší, b) najmenší počet prvkov zjednotenia $A \cup B \cup C \cup D \cup E$, kde A, B, C, D, E sú 5-prvkové množiny také, že $A \cap B = B \cap C = C \cap D = D \cap E = E \cap A = \emptyset$.

Úloha 8. Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$\frac{a^2 + b^2}{2ab},$$

kde a, b sú kladné reálne čísla.

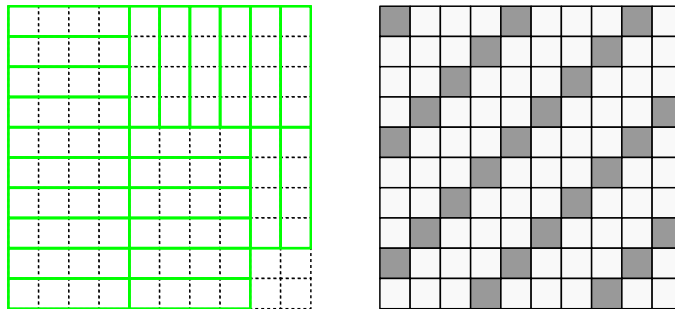
Úloha 9. Tabuľka 3×3 je vyplnená navzájom rôznymi kladnými celými číslami tak, že v každom riadku aj stĺpci je súčet krajných čísel rovný číslu napísanému medzi nimi. Zistite, aké najmenšie číslo môže byť napísané uprostred tabuľky.

Zadanie. Koľko najviac obdĺžnikov 1×4 možno bez prekryvania umiestniť do štvorčekovej siete rozmerov 10×10 ? Obdĺžniky musíme pokladať tak, aby zakryli štyri celé políčka siete.

1. Každý obdĺžnik 1×4 zakrýva presne 4 políčka, spolu je na doske $10 \cdot 10 = 100$ políčok. Preto najviac obdĺžnikov je

$$\frac{100}{4} = 25.$$

2. Zafarbíme si políčka štvorca šachovnicovo čiernou a bielou farbou. Každý obdĺžnik 1×4 zakrýva dve biele políčka a dve čierne. Obdĺžniky vieme rozdeliť na dve skupiny podľa toho, či ich ľavý horný roh je čierny alebo biely. V oboch týchto skupinách musí byť rovnako veľa obdĺžnikov, preto celkový počet obdĺžnikov je párny. Celý štvorec obsahuje 100 políčok a každý obdĺžnik pokryje 4 políčka. Preto nevieme umiestniť viac ako $100/4 = 25$ obdĺžnikov. Avšak 25 je nepárne číslo, takže nevieme umiestniť ani toľko. Správna odpoveď je tak 24, čo dosiahneme ako na obrázku vľavo.



3. Začneme umiestňovať obdĺžniky od rohu štvorca. Bez ujmy na všeobecnosti, prvý obdĺžnik umiestnime vodorovne. Aby sme využili priestor čo najlepšie, a teda umiestnili čo najviac obdĺžnikov, tak budeme pod neho umiestňovať ďalšie obdĺžniky vodorovne. Takto nám nezvýši žiaden zbytočný priestor. Ostal nám obdĺžnik rozmerov 10×6 . Aby sme čo najefektívnejšie pokryli stranu dĺžky 6, tak aj k nej umiestnime obdĺžniky zvislo, aby nám neostalo miesto. Oстане nám obdĺžnik 6×6 , pre ktorý túto úvahu opakujeme. Tatko uložíme 24 obdĺžnikov a ostenú nám 4 políčka vpravo dole tvoriace štvorec 2×2 .
4. Matematickou indukciou dokážeme, že pre každé celé $n \geq 0$ platí, že štvorec $(4n+2) \times (4n+2)$ nemožno celý pokryť obdĺžnikmi 1×4 .
 - Báza $n = 0$: Štvorec 2×2 nemožno pokryť, lebo je moc malý, aby sa doňho zmestil obdĺžnik 1×4 .
 - Indukčný krok pre $n \geq 1$: Predpokladajme, že štvorec $(4n-2) \times (4n-2)$ nemožno pokryť (IP). Ukážeme, že potom nemožno pokryť ani štvorec $(4n+2) \times (4n+2)$. Tento štvorec si rozdelíme na štvorec rozmerov $(4n-2) \times (4n-2)$ vľavo hore, pod ním a vpravo od neho nám ostanú dva obdĺžniky $4 \times (4n-2)$ a vpravo dole nám oстане štvorec 4×4 . Štvorec 4×4 vieme pokryť obdĺžnikmi (1×4) a rovnako aj obdĺžniky $4 \times (4n-2)$ (jednoducho ukladáme obdĺžniky 1×4 do radu za sebou). Avšak štvorec $(4n+2) \times (4n+2)$ z indukčného predpokladu nevieme pokryť. Preto nevieme pokryť ani väčší štvorec $(4n+2) \times (4n+2)$.

Z dôkazu indukciou vyplýva, že do štvorca 10×10 nevieme umiestniť 25 obdĺžnikov. Keďže 24 umiestniť vieme (obrázok vľavo), tak najväčší možný počet je 24.

5. Zafarbíme si niektoré políčka šedou ako na obrázku vpravo. Každý obdĺžnik 1×4 pokryje práve jedno šedé políčko. Preto vieme najviac umiestniť 25 obdĺžnikov.