

Počítanie spôsobov

Jozef Rajník, 28. 2. 2021

1 Ukážkové úlohy

Úloha 1.1. Prirodzené číslo nazývame *guľaté*, ak obsahuje iba cifry 0, 3, 5, 6, 8, 9.

- a) Koľko je 2-ciferných guľatých čísel?
- b) Koľko je 3-ciferných guľatých čísel?
- c) Koľko je 4-ciferných guľatých čísel?
- d) Koľko je 2- a 4-ciferných guľatých čísel?
- e) Koľko je 3-ciferných guľatých čísel, v ktorých sa žiadne cifry neopakujú?

Úloha 1.2. Koľkými spôsobmi možno na polici usporiadať 8 kníh?

Úloha 1.3. V triede je 30 žiakov. Koľkými spôsobmi možno z nich vybrať skupinu

- a) dvoch žiakov,
- b) troch žiakov,
- c) k žiakov, $0 \leq k \leq 30$,
- d) žiakov bez obmedzenia na veľkosť,

ktorá bude upratovať triedu? Pri výbere skupinky nám nezáleží na poradí žiakov.

Úloha 1.4. Koľko existuje 30-znakových slov zložených iba z písmen

- a) A, B
- b) A, B, C,

ktoré obsahujú presne 17 znakov A?

Úloha 1.5. Koľko existuje rôznych slovných prešmyčiek slova MATEMATIKA?

Úloha 1.6. Máme 32 sedmových kariet. Koľkými spôsobmi vieme z nich vybrať päťicu kariet, v ktorej je aspoň jedno eso?

Úloha 1.7. Koľkými spôsobmi možno rozdeliť 12 cukríkov medzi troch kamarátov?

Úloha 1.8. Hodíme naraz ôsmimi hracími kockami. Koľko rôznych kombinácií čísel na nich môžeme hodiť?

Úloha 1.9. Kráľ má 10 sluhov. Každému chce vyplatiť nezáporný celočíselný počet dukátov. Celkovo však nechce vyplatiť viac ako 200 dukátov. Koľkými spôsobmi môže kráľ vyplatiť sluhov?

2 Úlohy na precvičenie

Úloha 2.1. Koľko 9-ciferných čísel možno zložiť z cifier 0, 2, 4, 5, 7, 8, ktoré sú zároveň deliteľné číslom 25?

Úloha 2.2. Koľko je 5-ciferných čísel, ktoré obsahujú všetky cifry rôzne a zároveň sú deliteľné piatimi?

Úloha 2.3. V triede je 25 žiakov. Koľkými spôsobmi možno spomedzi nich vybrať 7-členné družstvo vrátane jeho kapitána. V rámci družstva nezáleží na poradí, ale záleží na tom, kto je kapitán.

Úloha 2.4. Koľko rôznych deliteľov má číslo $2^{10} \cdot 3^3 \cdot 7^8 \cdot 11 \cdot 47^{42}$?

Úloha 2.5. V obchode predávajú 8 druhov keksíkov. Chceme si kúpiť 20 keksíkov. a) Koľkými spôsobmi to môžeme spraviť? b) Čo ak chceme kúpiť z každého druhu aspoň jeden keksík?

Úloha 2.6. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby bol v každom riadku párny počet bielych políčok?

Úloha 2.7. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $2n \times 2n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby v každom riadku bolo rovnako veľa bielych a čiernych políčok?

Úloha 2.8. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby bol v každom riadku aj stĺpci párny počet bielych políčok?

Úloha 2.9. V ľavom dolnom rohu štvorčekovej siete 8×11 štvorčekov stojí robot a chce sa dostať do protiľahlého rohu štvorčekovej siete. Môže však chodiť iba po hranách štvorčekovej siete a pohybovať sa doprava alebo hore. Koľkými spôsobmi sa vie dostať do protiľahlého rohu?

Úloha 2.10. Poker sa hrá s 52 kartami: 2, 3, ..., 10, J, Q, K, A, každá z 13 hodnôt v štyroch farbách. Pokrovú kombináciu tvorí päť kariet bez ohľadu na poradie. Určte, koľkými spôsobmi možno vybrať

- a) pokrovú kombináciu bez žiadnych obmedzení;
- b) *straight flush* – postupka piatich kariet rovnakej farby;
- c) štyri karty s rovnakým číslom;
- d) *full house* – tri karty s číslom x a dve karty s číslom $y \neq x$;
- e) *flush* – všetky karty rovnakej farby;
- f) *straight* – postupka piatich kariet ľubovoľnej farby;
- g) *trojicu* kariet rovnakej hodnoty a zvyšné dve inej hodnoty, navzájom rôznej;
- h) *dva páry* kariet rovnakej hodnoty (navzájom však rôznej)
- i) *pár* kariet rovnakej hodnoty a zvyšné dve iných navzájom rôznych hodnôt

Úloha 2.11 (KMS 15/16-L1-4). Anina sa ocitla v bludisku. Bludisko má tvar rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky n a je rozdelené na sieť rovnostranných trojuholníčkov s dĺžkou strany 1. Anina sa nachádza v najvyššom trojuholníčku a potrebuje sa dostať na stredný trojuholníček v najspodnejšom riadku. Môže sa pohybovať len cez stredy hrán trojuholníčkov dole, doprava alebo doľava, pričom sa nesmie vrátiť do trojuholníčka, v ktorom už bola. (Vyjsť z veľkého trojuholníka nemôže.) Pre každé prirodzené číslo n určte, koľkými spôsobmi môže Anina prejsť bludiskom. Na obrázku je znázornené bludisko pre $n = 4$ a jedna možná cesta bludiskom.

Úloha 2.20 (KMS 14/15-L1-9). Koľkými spôsobmi možno ofarbiť tabuľku rozmerov $n \times n$ štyrmi farbami tak, že žiadna dvojica susedných štvorčiek nemá rovnakú farbu a v každom štvorčeku 2×2 sa nachádzajú všetky štyri farby?

Úloha 2.21 (Náboj 2017-52). Nech $f(n)$ je počet prirodzených čísel, ktoré majú presne n cifier a ktorých cifry majú súčet 5. Určte, koľko z 2017 prirodzených čísel $f(1), f(2), \dots, f(2017)$ má cifru na mieste jednotiek rovnú 1.

Výsledky

2.1 $5 \cdot 6^6 \cdot 4$

2.2 $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 9 \dots 8 \dots 7 \dots 6 = 17 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 5712$

2.3 $\binom{25}{7} \cdot 7 = 25 \cdot \binom{24}{6} = 3\,364\,900$

2.4 $11 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 43$

2.5 a) $\binom{27}{7}$, b) $\binom{19}{7}$

2.6 $2^{n(n-1)}$

2.7 $\binom{2n}{n}^{2n}$

2.8 $2^{(n-1)^2}$

2.9 $\binom{19}{8}$

2.10 a) $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$

b) $4 \cdot 9 = 36$

c) $13 \cdot 48 = 624$

d) $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 3\,744$

e) $4 \cdot \binom{13}{5} = 5\,148$

f) $9 \cdot 4^5 = 9\,216$

g) $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 48 \cdot 44/2 = 54\,912$

h) $\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot 44 = 123\,552$

i) $13 \binom{4}{2} \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40/6 = 1\,098\,240$

2.11 $n!$, sledujte miesta, na ktorých sa pohne smerom dole.

2.12 $\binom{9}{5}$, stačí nám vybrať množinu cifier

2.13 a) $\binom{24}{8}$, b) $\binom{25}{9}$, stačí nám len určiť, ktoré cifry tam budú, poradie sa nám určí samé.

2.14 Jedno (ne)chcené slovo nahraďte novým symbolom a využite permutácie. Odrátajte zlé možnosti v prípade potreby

a) $26! - 21!$, b) $26! - 21! - 23! + 18!$, c) $26! - 3 \cdot 24!$

2.15 Prvému miestu dajte jednu 1-ku a zvyšných 10 1-tiek rozdeľte. Odrátajte potom zlé možnosti.

$$\binom{20}{10} - 10 - 10 \cdot 1$$

2.16 $130 = 2 + 2^7$ - čo sa stane, ak v nejakom stĺpci sú obe políčka rovnaké?

2.17 $n \cdot 2^5$

Rozdeľte si možnosti podľa miest, na ktorých máme trojuholníky, ktoré majú spoločné práve dve strany s n -uholníkom. Takto započítate každé riešenie dvakrát.

2.18 $19 \cdot (3^{n-3} - 1)/2 + 9$

Ukážte, že s výnimkou zopár malých závaží, každé rozmiestnenie závaží nám určí jedinečnú hmotnosť, ktorú vieme odvážiť.

2.19 $\binom{26}{17}$, výber kníh reprezentujte ako $i_1, i_2 + 1, \dots, i_{17} + 16$, kde i -čka sú od 1 po 26.

2.20 $12 \cdot 2^n - 24$

Čo sa stane, ak máme v riadku aspoň tri rôzne farby?

2.21 202