

Kombinatorika

Jozef Rajník, Prípravné sústredenie pred IMO a MEMO, 23. – 30. 6. 2023

Úlohy sú označené značkami:

♡ odporúčaná úloha na riešenie, plánujem z nej ukazovať vzorák.

(!) úloha, ktorú sa oplatí poznať – ak ju nepoznáte, odporúčam si niekedy preriešiť

(?) úloha, kde si už úplne nepamätám riešenie.

1 Invarianty, ofarbovanie a podobné

Vo viacerých úlohách budeme dláždiť nejaké útvary. Pod dláždením myslíme uloženie prípustných dlaždíc bez prekryvania, pričom hranice dlaždíc pokladáme na hranice štvorčekov štvorčkovej siete. Ak nie je špecifikované inak, tak dlaždice môžeme otáčať a preklápať.

Príklad 1 (Folklór). Spomedzi tetromín I, L, O, S, T nájdite také, ktorými možno vydlaždiť celú šachovnicu rozmerov 10×10 .

Príklad 2. Máme štvorčekovú sieť $m \times n$ políčok a na každom z nich zhasnutú lampu. V jednom ťahu vieme vybrať k lúč v obdĺžniku $1 \times k$ a každej zmeniť jej stav zo zhasnutej na vypnutú a naopak. V závislosti od k určte m, n , pre ktoré vieme po konečnom počte operácií zažať všetky lampy.

Úloha 1. (♡) Tabuľku $(2n - 1) \times (2n - 1)$ štvorčekov vydlaždíme dlaždicami troch typov: triominá L, tetrominá S tetrominá O (môžeme ich otáčať a preklápať). Dokážte, že sme použili aspoň $4n - 1$ triomín L.



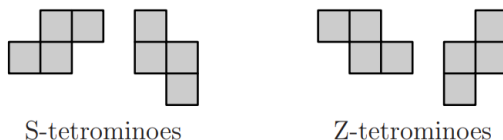
Úloha 2 (OIM shortlist 2009, [1] Problem 3.4). (♡) Na každom políčku mriežky 8×8 políčok sa nachádza zhasnutá lampka. V jednom ťahu si zvolíme ľubovoľnú lampku, ľubovoľný (vodorovný alebo zvislý) smer a prepneme zvolenú lampku spolu so susednými lampkami vo zvolenom smere. Po nejakom počte ťahov nám ostane svietiť práve jedna lampka. Nájdite všetky políčka, na ktorých sa môže táto lampka nachádzať.

Úloha 3 (KMS 2003/04-L1-10). (♡) Feldo našiel na povale starú šachovú figúrku – delfína a spomenul si na vekmi zabudnutý kaprov problém. Delfín sa môže hýbať o 1 políčko doprava, o 1 políčko hore alebo o 1 políčko po diagonále doľava dole. Na začiatku stojí delfín v ľavom dolnom rohu šachovnice 8×8 . Dá sa s ním prejsť celá šachovnica tak, aby na každom políčku stál práve raz?

Úloha 4 (KMS 17/18-3Z-9). Linoleum na podlahe jedálne tvorí štvorčekovú mriežku $m \times n$ štvorčekov. V každom štvorčeku sa nachádza jeden stôl. Osvetlenie jedálne zabezpečujú lampy, ktoré sa nachádzajú v niektorých mrežových bodoch mriežky (vrátane tých na obode, všetkých mrežových bodov je teda $(m + 1)(n + 1)$). Každá lampka osvetľuje stoly na tých štvorčekoch, v ktorých rohoch sa nachádza. V závislosti od prirodzených čísel m, n nájdite najmenší počet lúč potrebný na to, aby každý stôl bol osvetlený aspoň dvomi lampami.

Úloha 5 (65MO-A-III-6). (♥) Na niektoré políčko šachovnice 6×6 postavíme figúrku kráľoviča. Tá môže v jednom ťahu poskočiť buď v zvislom, alebo vo vodorovnom smere. Dĺžka tohto skoku je striedavo jedno a dve políčka, pričom skokom dĺžky jedna (t. j. na susedné políčko) figúrka začína. Rozhodnite, či sa dá zvoliť východisková pozícia figúrky tak, aby po vhodnej postupnosti 35 skokov navštívila každé políčko šachovnice práve raz.

Úloha 6 (IMO SL 2014 C4). (♥) Construct a tetromino by attaching two 2×1 dominoes along their longer sides such that the midpoint of the longer side of one domino is a corner of the other domino. This construction yields two kinds of tetrominoes with opposite orientations. Let us call them S - and Z -tetrominoes, respectively. Assume that a lattice polygon P can be tiled with S -tetrominoes. Prove that no matter how we tile P using only S - and Z -tetrominoes, we always use an even number of Z -tetrominoes.



Úloha 7 (IMO SL 2002 C2). For n an odd positive integer, the unit squares of an $n \times n$ chessboard are coloured alternately black and white, with the four corners coloured black. A *tromino* is an L -shape formed by three connected unit squares. For which values of n is it possible to cover all the black squares with non-overlapping trominos? When it is possible, what is the minimum number of trominos needed?

Úloha 8 (KMS 14/15-Z2-9). Hopko si z Ameriky objednal šachovnicu s rozmermi 7×7 a začal ju dláždiť, hneď ako ju dostal. K dispozícii mal dva typy dlaždičiek: S -ko zložené zo štyroch dlaždičiek a L -ko zložené z troch dlaždičiek. Dokážte, že ak chce Hopko takýmito dlaždičkami kompletne vydláždiť celú šachovnicu (bez prekryvov a bez kúskov vyčnievajúcich zo šachovnice), tak musí použiť práve jednu S -kovú dlaždičku.

Úloha 9 (APMO 2007). Na každom políčku tabuľky 5×5 je zhasnutá lampa. V jednom kroku si môžeme vybrať lampu a vybranú lampu spolu so všetkými lampami na susedných políčkach prepnúť. Po niekoľkých krokoch nám ostala svietiť jedna lampa. Nájdite všetky políčka, na ktorých to mohlo byť.

Úloha 10 (IMO 1986). (♥) Vo vrcholoch päťuholníka sú umiestnené celé čísla tak, že súčet všetkých piatich čísel je kladný. Ak máme tri po sebe idúce vrcholy hodnoty v poradí x, y, z , pričom $y < 0$, tak ich možno nahradiť hodnotami v poradí $x + y, -y, z + y$. Toto opakujeme, kým medzi nimi existuje aspoň jedno záporné číslo. Zistite, či tento postup musí skončiť po konečne veľa krokoch.

Úloha 11 (IMO SL 2009 C6). (♥) On a 999×999 board a limp rook can move in the following way: From any square it can move to any of its adjacent squares, i.e. a square having a common side with it, and every move must be a turn, i.e. the directions of any two consecutive moves must be perpendicular. A non-intersecting route of the limp rook consists of a sequence of pairwise different squares that the limp rook can visit in that order by an admissible sequence of moves. Such a non-intersecting route is called cyclic, if the limp rook can, after reaching the last square of the route, move directly to the first square of the route and start over. How many squares does the longest possible cyclic, non-intersecting route of a limp rook visit?

Úloha 12 (KMS 11/12-Z1-10). Petržlena už prestalo baviť hrať obyčajné piškvorky s CéDečkom. Preto si vymyslel inú hru, podobnú piškvorkám. Hrá sa na nekonečnom štvorčekovom papieri. Petržlen začína a označí nejaké neoznačené políčko krížikom, potom CéDečko označí nejaké neoznačené políčko krúžkom a takto sa ďalej striedajú. Vyhráva hráč, ktorého znak vyplní štvorec 2×2 . Dokáže Petržlen vo svojej hre vždy vyhrať?

Úloha 13 (KMS 11/12-L3-11). (♥) Na šachovnici 8×8 nazývame dve políčka *dotýkajúce sa*, ak spolu susedia stranou alebo rohom. Určte, či dokáže šachový kráľ prejsť celú šachovnicu tak, že začína na nejakom políčku, a počnúc od druhého ťahu sa vždy pohne na políčko dotýkajúce sa s párnym počtom už navštívených políčov.

Úloha 14. (?) Na z oboch strán nekonečnom rade políčov je rozmiestnených konečne veľa kameňov. Ak sa na nejakom políčku nachádzajú aspoň dva kamene, môžeme z tohto políčka zobrať dva kamene a položiť po jednom z nich na dve susedné políčka. Existuje počiatočné rozmiestnenie kameňov také, že po nenulovom konečnom počte spomenutých ťahov je možné dostať počiatočné rozloženie?

Úloha 15 (Stanford Putnam training 2007). (♥) Majme tabuľku $n \times n$, na ktorej je $n - 1$ čiernych políčov (zvyšné su biele). V jednom kroku si vieme vybrať biele políčko, ktoré susedí hranou s aspoň dvomi čiernymi, a zafarbiť ho načierne. Dokážte, že opakovaním takýchto krokov nevieme zafarbiť všetky políčka šachovnice načierne.

Úloha 16 (KMS15/16-L3-8). (♥) Kozzy si do tabuľky 10×10 napísal čísla $1, 2, \dots, 100$, pričom do prvého riadku napísal postupne zľava doprava čísla $1, 2, \dots, 10$, do druhého zľava doprava čísla $11, 12, \dots, 20$ atď. až do posledného riadku napísal zľava doprava čísla $91, 92, \dots, 100$. Potom sa začal s tabuľkou hrať tak, že s ňou vykonával nasledujúce ťahy: V jednom ťahu si vyberie 3 za sebou idúce políčka v riadku, v stĺpci alebo na diagonále a buď krajné políčka zníži o 1 a prostredné políčko zvýši o 2, alebo krajné zvýši o 1 a prostredné zníži o 2. Po konečnom počte ťahov sa Kozzemu podarilo dostať v tabuľke znova čísla $1, 2, \dots, 100$. Dokážte, že sú v pôvodnom poradí.

Úloha 17 (IMOSL 2022-C4).

Úloha 18. (!) V tabuľke 4×4 môžeme presúvať štvorčeky na voľné miesto. Môžeme tak z konfigurácie naľavo dostať konfiguráciu napravo?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

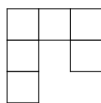
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Úloha 19 (Výberové sústredenie 2013/14). Šialený vedec zostrojil armádu robotov. Problém je v tom, že niektoré dvojice robotov sa nenávidia (nenávisť je vzájomná). Vždy však s robotmi vie urobiť jednu z nasledujúcich dvoch operácií:

- Ak nejaký robot nenávidí nepárny počet robotov, vedec ho môže zničiť.
- Vedec môže zdvojnásobiť armádu tak, že každý robot R sa rozdelí na dvoch robotov R_1 a R_2 . Pre každú dvojicu pôvodných robotov R, Q , ktorí sa nenávideli, sa budú nenávidieť aj roboti R_1 a Q_1 , aj roboti R_2 a Q_2 . Roboti R_1 a R_2 sa tiež nenávidia pre každého pôvodného robota R . To sú všetky dvojice robotov, ktoré sa budú nenávidieť po zdvojnásobení.

Dokážte, že vedec vie po konečnom počte operácií dostať armádu robotov, v ktorej neexistuje dvojica robotov, ktorá sa nenávidí.

Úloha 20 (IMO2004-3). (♥) Nazvime *hák* útvar vytvorený zo šiestich jednotkových štvorčekov ako na obrázku.



Nájdite všetky pravouholníky $m \times n$, ktoré sa dajú vydláždiť hákmi.

2 Ďalšie kombinatorické úlohy

Úloha 21 (Folklór). (♡) Koľko najmenej čísel spomedzi $1, 2, \dots, n$ musíme vybrať, aby sme mali istotu, že niektoré z vybraných čísel delí iné z vybraných čísel?

Úloha 22 (KMS 10/11-L3-7). Vedúci KMS radi klebetia a každý z nich pozná niekoľko klebiet. Každí dvaja vedúci poznajú aspoň jednu rovnakú klebetu. Navyše žiadni dvaja nepoznajú presne tú istú množinu klebiet (aj v prípade, že Kubko pozná len klebetu A a Matko klebety A a B , hovoríme, že poznajú iné klebety). Koľko najviac vedúcich môže mať KMS, ak všetci dokopy poznajú práve n rôznych klebiet?

Úloha 23 (KMS 15/16-1Z-7). Zajo si natiera plot, pričom dodržiava nasledujúce pravidlá:

- žiadne dve susedné latky nemajú rovnakú farbu,
- nevieme z plota vybrať štyri latky (nie nutne susedné) bez zmeny ich poradia tak, aby boli natreté v poradí X, Y, X, Y , pre žiadne dve rôzne farby X, Y .

Koľko najviac latiek môže mať Zajov plot, ak nechce použiť viac ako n rôznych farieb?

Úloha 24 (KMS 11/12-Z3-7). (♡) Petržlena s CéDečkom už prestalo baviť hrať piškvorky. Preto CéDečko vymyslel novú kartovú hru. V tejto hre je $2n$ kariet položených na stole v rade za sebou. Na každej karte je zhora napísané prirodzené číslo. Jeden ťah spočíva v tom, že si hráč na ťahu zoberie kartu z kraja radu. Prvý ťahá CéDečko a ďalej sa s Petržlenom striedajú. Hra skončí, keď sa minú všetky karty na stole. Skóre hráča je súčet čísel na kartách, ktoré si potiahol. Dokážte, že CéDečko môže mať vždy aspoň také skóre ako Petržlen.

Úloha 25 (IMO 1972, úloha 1). (♡) Máme 10 dvojčíferných čísel. Dokážte, že z nich vieme vybrať dve disjunktné množiny s rovnakým súčtom.

Úloha 26 (IMO SL 2006 C1). (♡) We have $n \geq 2$ lamps $L_1, \dots, L_n$ in a row, each of them being either on or off. Every second we simultaneously modify the state of each lamp as follows: if the lamp L_i and its neighbours (only one neighbour for $i = 1$ or $i = n$, two neighbours for other i) are in the same state, then L_i is switched off; – otherwise, L_i is switched on. Initially all the lamps are off except the leftmost one which is on.

- Prove that there are infinitely many integers n for which all the lamps will eventually be off.
- Prove that there are infinitely many integers n for which the lamps will never be all off.

Úloha 27. (!) Pre dané prirodzené číslo n nájdite najväčšie číslo k také, že možno do kruhu napísať postupnosť núl a jednotiek dĺžky k takú, že žiadna n -tica sa tam nevyskytuje dvakrát.

Úloha 28 (IMO 2002, úloha 1). Nech n je kladné celé číslo a nech T je množina všetkých bodov (x, y) v rovine, kde x a y sú celé nezáporné čísla a $x + y < n$. Každý bod z množiny T je ofarbený buď červenou, alebo modrou farbou. Ak je bod (x, y) červený, sú červené aj všetky body $(x', y') \in T$, pre ktoré platí $x' \leq x$ a $y' \leq y$. Nech X je počet spôsobov, ako môžeme vybrať n modrých bodov tak, že všetky ich x -ové súradnice sú rôzne a nech Y je počet spôsobov, ako môžeme vybrať n modrých bodov tak, že všetky ich y -ové súradnice sú rôzne. Dokážte, že platí $X = Y$.

Úloha 29 (PraSe, Seriál Teorie Her, Hra 10). (♡!) Dvaja hráči začínajú s číslom 2 a striedajú sa v ťahoch. Hráč na ťahu pripočíta k aktuálnemu číslu niektorého kladného vlastného deliteľa. Hráč, ktorý ako prvý prekročí číslo 4247, prehral. Ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu? A čo v prípade, že hráč, čo prekročí 4247 vyhrá?

Úloha 30 (AOPS). Máme 100 na pohľad nerozlíšiteľných mincí, z ktorých každá váži 1, 2 alebo 3 gramy. Je možné za pomoci 101 vážení zistiť hmotnosti všetkých mincí?

Úloha 31 (KMS 18/19-Z1-9). Keďže Betke je za Kikou smutno, upiekla jej ďalších 20 perníkov s váhami postupne 10, 20, $\dots$, 200 gramov, ale nevie, ktorý perník koľko váži. Keď prišla na poštu zistila, že môže Kike poslať len dva perníky. Chvalabohu, Vodka je po ruke a je skúsený vážič jedla. Betka môže dať Vodkovi ľubovoľné dva perníky a Vodka jej povie, ktorý je ťažší. Žiaľbohu, Vodka to nerobí zadarmo. Zakaždým, keď dáva Betka Vodkovi vážiť perníky, musí mu dať spolu s nimi tretí perník, ktorý Vodka zje. Výsledok váženia Vodka povie až po zjedení perníka. Vie Betka týmto spôsobom zaručene nájsť dva perníky, ktoré spolu vážia aspoň a) 280 b) 300 gramov?

Úloha 32 (KMS 07/08-L1-11). Kružnica, rozdelená na n oblúkov bodmi postupne pomenovanými $1, 2, 3, \dots, n$, reprezentuje hraciu arénu pre dvoch hráčov, ktorí sa striedajú v ťahaní. V jednom ťahu si hráč vyberie dva zatiaľ voľné body (také, ktoré ešte nie sú koncom žiadnej úsečky) s rovnakou paritou a spojí ich úsečkou. Môže ale spojiť iba také body, aby novovzniknutá úsečka nepretínala žiadnu z predchádzajúcich úsečiek. Prehrá ten hráč, ktorý už nemôže spraviť ťah. Ak obaja hráči používajú optimálnu stratégiu, ktorý z nich vyhrá?

Úloha 33 (IMO 2017 Shortlist, C3). (?) Alex hrá nasledujúcu hru s 9 políčkami uloženými v riadku. Na začiatku sú všetky políčka prázdne. V každom svojom ťahu môže Alex vykonať práve jednu z nasledujúcich operácií:

- (1) Vyberie si ľubovoľné číslo tvaru 2^j , kde j je nezáporné celé číslo, a umiestni ho do ľubovoľného prázdneho políčka.
- (2) Vyberie si dve (nie nutne susedné) políčka, ktoré obsahujú to isté číslo; označme ho 2^j . V jednom políčku toto číslo nahradí číslom 2^{j+1} a z druhého políčka číslo vymaže.

Na konci hry obsahuje jedno políčko číslo 2^n , kde n je dané kladné celé číslo, a zvyšné políčka sú prázdne. V závislosti od n určte najväčší možný počet ťahov, ktoré Alex mohol spraviť.

Úloha 34 (Tournament of towns 1985). (?) V Bumbálke je 32 študentov, ktorí sú zoskupení v 33 tajných matematických krúžkoch. Každý krúžok pozostáva z troch študentov a žiadne dva krúžky nemajú rovnaké zloženie. Dokážte, že existujú dva krúžky, ktoré majú práve jedného spoločného študenta.

Úloha 35 (KMS 2002/3-L1-11). (!) Nech S je podmnožina $2n$ mrežových bodov vo štvorci $n \times n$ mrežových bodov. Každé dva body (ktoré môžu byť) sú spojené vodorovnou alebo zvislou čiarou (rovnobežnou so stranami obdĺžnika). Dokážte, že sa tam musí nachádzať uzavretá lomená čiara z tých spojnic.

Úloha 36 (IMO 2009, úloha 6). (?) Nech $a_1, a_2, \dots, a_n$ sú navzájom rôzne kladné celé čísla a M je množina $n - 1$ kladných celých čísel neobsahujúca číslo $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Lúčny koník skáče pozdĺž číselnej osi, pričom začína v bode 0 a urobí smerom doprava n skokov s dĺžkami $a_1, a_2, \dots, a_n$ v nejakom poradí. Dokážte, že poradie skokov sa dá zvoliť tak, aby lúčny koník nepristál na žiadnom čísle z množiny M .

Literatúra

- [1] Problem solving methods in combinatorics

Nápovedy k riešeniam

1. Nájdite ofarbenie také, že každé O a S zakryjú práve jeden štvorček a každé L zakryje najviac jeden štvorček. Potom len spočítajte
2.
 - Existuje jednoduchá konštrukcia, ako dostať jednu svietiacu lampu. Na ktorých políčkach ju vieme dostať?
 - Ak ste našli správne, jednu svietiacu lampu vieme dostať na dva ťahy. Takto vieme odstaviť osamotené lampy na políčkach dve políčka od nejakého kraja. Vyfarbite si to. Ako viete toto farbenie využiť?
 - Všimnite si, že každý ťah prepína párny počet nevyfarbených políčok.
3.
 - Ofarbite si šachovnicu tak, aby delfín pri každom pohybe menil farbu políčka. Prísť na ofarbenie je jednoduché. Stačí postupne farbiť podľa tejto podmienky.
 - Správne ofarbenie využíva 3 farby, ale z farby začiatočného políčka máme najmenej políčok (21).
4.
 - Nájsť konštrukcie by nemusel byť problém. Pre dolný odhad počtu lúčov nájdite vhodnú množinu stolov.
 - Ako základ zvolte stoly tak, nech každá lampa osvecuje najviac vybraný jeden stôl. Sumujúc cez všetky vybrané stoly máme dolný odhad. V jednom prípade to však úplne nefunguje. Môžete vaše úvahy rozšíriť a dovoliť nejaké lampy osvetľujúce viac stolov.
5.
 - Opäť si zafarbite šachovnicu tak, aby kráľovič pri svojich ťahoch vhodne menil farby.
 - Pri ťahoch o 1 funguje šachovnicové ofarbenie. Pri ťahoch o 2 tiež vieme ofarbiť šachovnicu dvomi farbami. Dokonca na štyri nezávislé časti (lebo ťahmi dĺžky 2 sa kráľovič vie hýbať len po štvrtine šachovnice). Skúste tieto farbenia skombinovať.
 - Mali by ste dospieť k ofarbeniu pomocou 4 farieb (ktoré je aj jedno z najznámejších). Aké farby navštívi kráľovič v štyroch po sebe idúcich ťahoch?
 - Ak sa vám nedarí prísť do sporu, lebo vám ostali nejaké políčka, na ktorých by kráľovič začínať mohol, tak ste už len kúsok od riešenia. Stačí vlastne spraviť to isté, len s trošičku iným farbením.
6.
 - Ofarbite si polygón čierno-bielo tak, aby každé S zakrylo párny počet čiernych políčok a každé Z nepárny počet čiernych.
 - Také ofarbenie sa dá nájsť celkom jednoducho: začnite so štvorcom 2×2 a ďalej sa vám všetko určí.
7.
 - Dostať sa k správnejmu výsledku pri tejto úlohe nie je jednoduché. Odporúčam vám najprv dostatočne sa s úlohou pohrať.
 - Existuje n , pre ktoré vieme zakryť všetky čierne políčka. Ak ste také ešte nenašli, tak pohľadajte a skúste nájsť aj ďalšie.
 - Pre získanie horných odhadov sa pozrite na vhodnú podmnožinu čiernych políčok a spočítajte pokrývanie.

8.
 - Ofarbíte šachovnicu tak tak, aby každé S zakrývalo práve jedno čierne políčko. Rozmyslite si potom, či čiernych políčok chcete radšej viac alebo menej.
 - Označíte si počet použitých S -iek a počítajte, ako to vychádza s pokrytými políčkami v jednotlivých farbách.
9.
 - Opäť nájdite štandardné ofarbenie – také, kde každý ťah prepína párny počet vyfarbených políčok.
 - Nie zrovna najjednoduchšie nájsť konštrukciu pre tie políčka, pre ktoré to ide.
10.
 - Nájdite monovariant, ktorý bude klesať. Avšak nemôže klesať neobmedzene, takže musí byť niečím ohraničený. Napr. skúste taký, ktorý môže byť iba nezáporný. Môžete skúšať rôzne výrazy.
 - Záporných čísel sa zbavíte, ak budete mať všetky čísla čo najviac rovnaké. Skúste hľadať také výrazy, ktoré majú malé hodnoty pre takmer rovnaké čísla.
11.
 - Aj pri tejto úlohe pôjde o vhodné ofarbenie šachovnice, len na prvý pohľad nie je jasné, čo by to ofarbenie malo sledovať. Skúste sa odvinúť od toho, že limp rook má na výber (s výnimkou prvého ťahu) najviac dve políčka na výber.
 - Ofarbíte si šachovnicu 4 farbami tak, aby
12.
 - Nedokáže. Nájdite spôsob, ako má CéDečko odpovedať na Petržlenove ťahy.
 - Vhodne si podvojíte políčka. CéDečko dá krúžok vždy do druhého políčka vo dvojici. Takto doshaneme, že každá dvojica bude mať jeden krúžok. Stačí teda zaručiť, že každý štvorec obsahuje aspoň jednu takúto dvojicu.
13.
 - Pri tejto úlohe nejde o farbiaci invariant. Skúste sa zamyslieť nad niečím iným. Zo zadania si môžete domyslieť, že to bude mať niečo s paritou, ako naznačuje zadanie.
 - Každé novo navštívené políčko susedí s párnym počtom už navštívených políčok. Skúste si tieto susednosti nejako zaznačiť do obrázka.
 - Susednosti si môžeme predstaviť ako dvere medzi susednými komnatami (políčkami), resp. aj ak hrany grafu. Každý ťah nám „míňa“ párny počet týchto susedností (dveré, hrán, ...)
15.
 - Nakreslite si niekoľko príkladov krokov. Môžete sa pozrieť aj na také, kde máte už súvislé útvary, príp. kde dostávate už štvorec. Čo majú tieto útvary spoločné, resp. v čom sa líšia len jedným smerom, žeby sme tam mohli mať monovariant.
 - Pozrite sa na obvod útvaru.
16.
 - Môže vám pomôcť nasledovná predstava: miesto čísel si na každom políčku predstavte príslušný počet kamienkov / žetónov.
 - Ak používame predstavu cez kamienky / žetónmi, čo sa deje s ich ťažiskom? Toto sa dá vyjadriť aj trochu inak (možno aj jednoduchšie matematicky).
 - Ťažisko je invariantné, resp. aj $\sum_{i=1}^{100} i a_i$, kde a_i je číslo na políčko, kde bolo na začiatku i . Počiatočná tabuľka má túto hodnotu jedinečnú. Akým spôsobom minimalizujete ťažisko? Pri druhom invariante postačí permutačná nerovnosť.
18. Pri úlohách o permutáciách (teda postupnosť čísel $1, 2, \dots, n$ v nejakom poradí) sa oplatí študovať tzv. *počet inverzií* permutácie. Ide o počet dvojíc prvkov, ktoré sú v opačnom poradí.

- 19.
- Nájdite monovariant, ktorý bude vyjadrovať, ako blízko ste cieľovému stavu. Ukážte, že ho viete znižovať.
 - Graf nám „zväčšuje“ druhá operácia. Preto ukážte, že druhú operáciu vieme vykompenzovať znížením monovariantu.
 - Ako vyzerajú grafy, ktoré vieme vybaviť len s 1. operáciou? Ako by potom mohli vyzeráť tie, kde operáciu 2 použijeme len raz, ...
- 20.
- Háky sa vždy dajú popárovať, čím vytvoria 12-políčkové dlaždice dvoch typov.
 - Teda $12 \mid mn$. Nájdite konštrukcie, kedy to ide.
 - Pre vylúčenie prípadov nájdite vhodné ofarbenie tabuľky.
 - Všimnite si, že celkom pekne funguje, keď ofarbujeme po stĺpcoch alebo po riadkoch. Skúste sa od toho odpichnúť.
 - Z nájdenej konštrukcie sa dá prísť na to, že chcete ukázať podmienku $24 \mid mn$, teda musíme mať párne veľa dlaždíc. Teda aj naše farbenie by chcelo mať niečo s paritou.
21. Táto úloha si priamočiara pýta Dirichletov princíp a tak sa aj rieši. Povedzte si, na aké skupinky si chcete čísla podeliť a nájdite ich.
- 24.
- Vedel by si CéDečko nejako zaručiť, aké čísla si vlastne zoberie?
 - Áno vedel. Vhodne si rozdeľte čísla na dve polovice, aby CéDečko vel zobral takú, ktorej súčet nie je menší ako druhej.
 - Ofarbite si karty striedavo bielou a čiernou farbou a hrajte za CéDečka tak, aby nútil Petržlena brať len tú horšiu farbu.
25. Čo ak by sme zo zadania vypustili „disjunktné“?
- 27.
- Preložte si úlohu do teórie grafov.
 - Nechte hľadať (Hamiltonovskú) kružnicu cez všetky vrcholy, lebo to je ťažký problém. Chcete hľadať niečo jednoduchšie cez všetky *veci*. Otázka je, čo sú to tie veci a ako následne tú úlohu tak na grafy transformovať.
 - Preložte zadanie ako orientovaný graf a hľadajte v ňom uzavretý (Eulerov) ťah prechádzajúci každou hranou práve raz.
- 29.
- Začnite si kresliť schému hry, *zo začiatku*. Je číslo 6 vyhrávajúce či prehrávajúce?
 - To nevieme (teda ak sa moc nenudíme a nerozoberieme to celé :)). No prvý hráč vie v oboch prípadoch tomu prispôbiť stratégiu. Tým pádom vyhráva v oboch variantoch hry.

- 32.**
- Úloha sa dá ľahko skúšaním vyriešiť pre n zhruba do 10. Pritom sa dá odpozorovať, ako asi bude vyzeráť výsledok. Tiež by ste si mohli všimnúť, že pre istú skupinu n -iek má prvý hráč víťaznú stratégiu.
 - Pre $n = 4k$ vyhrá prvý hráč – spojí dva protiľahlé body a hrá symetricky na druhej polovici ako súper. Všimnite si, čo potrebujete na takúto symetrickú hru a skúste podobné stratégie nájsť aj v ďalších prípadoch. Pamätajte, že vaše úvahy by mali pokryť aj pozície, kde nie sú body zafarbené striedavo.
 - Pre $n = 4k + 3$ to vyzerá, že prvý má víťaznú stratégiu. Pekným víťazným ťahom vyzerá spojenie $2k + 1$ a $2k + 3$. Skúste si všimnúť, akú vlastnosť má konfigurácia, ktorú teraz dostaneme. Využite pri tom stredovú súmernosť.
 - Uvažujte dva špeciálne prípady, čo sa môže stať po zobrazení kruhu s párnym počtom bodov (rozmiestnených rovnomerne) v stredovej súmernosti. Čo ak sa kruh zobrazí na seba? Čo ak sa tým vymenia farby všetkých bodov?
 - Ukážte, že v prvom prípade máme vyhrávajúcu pozíciu a v druhom prehrávajúcu.
- 34.** Ukážte, že jeden študent je v aspoň štyroch krúžkoch. Čo viete povedať o krúžkoch, v ktorých nie je?