

Stromy

KMS letné sústreďenie ALFA, 16. 6. – 23. 6. 2018, Huty, Jozef Rajník

Niekoľko definícií z teórie grafov

Definícia 1. *Graf* sa skladá z niekoľkých *vrcholov* a *hrán*. Každá hrana spája niektorú dvojicu vrcholov.

Graf je univerzálny abstraktný spôsob ako môžeme reprezentovať nejaké objekty a vzťahy medzi nimi. Napr. grafom môžeme reprezentovať:

- ľudí, z ktorých sa niektorí kamarátia;
- mestá, ktoré sú spojené priamou cestou;
- čísla, z ktorých niektoré majú spoločného deliteľa
- a mnohé iné.

Na stromy sa budeme dívať ako špeciálny prípad grafu.

Definícia 2. *Stupeň vrchola* v grafe je počet hrán, ktoré sú s nim spojené.

Definícia 3. *Cesta* v grafe je postupnosť navzájom rôznych vrcholov $v_1, v_2, \dots, v_n$ taká, že každá dvojica vrcholov v_i, v_{i+1} pre $1 \leq i \leq n-1$ je spojená hranou.

Definícia 4. *Cyklus* (niekedy tiež *kružnica*) v grafe je postupnosť vrcholov $v_1, v_2, \dots, v_n$ taká, že každá dvojica vrcholov v_i, v_{i+1} pre $1 \leq i \leq n$ je spojená hranou a taktiež aj vrcholy v_n a v_1 sú spojené hranou.

Definícia 5. Graf nazývame *súvislý*, ak každé dva jeho vrcholy sú spojené cestou.

Definícia a vlastnosti stromov

Definícia 6. *Strom* je súvislý graf, ktorý neobsahuje cyklus.

Definícia 7. *List* stromu je vrchol stupňa 1.

Úloha 1. Pre celé číslo $n \geq 2$ určte, koľko najmenej a koľko najviac listov môže mať strom s n vrcholmi.

Úloha 2. Máme strom na n vrchoch. Každý vrchol má stupeň nanajvyš 2. Koľko najviac môže mať listov? Ako v prípade, keď každý vrchol má stupeň nanajvyš d ?

Úloha 3. Dokážte, že ak strom obsahuje vrchol stupňa s , tak obsahuje aspoň s listov.

Úloha 4. Koľko hrán môže obsahovať strom na n vrchoch?

Definícia 8. *Les* je graf, ktorý neobsahuje cyklus. To znamená, že sa skladá z niekoľkých nespojených stromov.

Tvrdenie 1. Strom s aspoň dvoma vrcholmi obsahuje aspoň 2 listy.

Tvrdenie 2. Strom s n vrcholmi obsahuje práve $n-1$ hrán.

Dôsledok tohto tvrdenia je nasledovné tvrdenie, ktoré nám môže pomôcť v úlohách, kde máme skúmať (ne)existenciu cyklu v nejakom grafe.

Tvrdenie 3. Graf, ktorý má aspoň toľko hrán ako vrcholov, obsahuje cyklus.

Tvrdenie 4. Les obsahujúci n vrcholov rozdelených do s stromov obsahuje práve $n-s$ hrán.

Na stromoch je krásne, že sa dajú definovať mnohými ekvivalentnými spôsobmi.

Tvrdenie 5. Pre graf G s n vrcholmi sú nasledovné tvrdenia ekvivalentné:

1. G je súvislý acyklický graf (teda strom podľa našej definície).
2. G je súvislý graf s $n-1$ hranami.
3. G neobsahuje kružnicu a má $n-1$ hrán.
4. G neobsahuje cyklus, ale po pridaní ľubovoľnej ďalšej hrany už bude obsahovať cyklus.
5. G je súvislý, ale po odobraní ľubovoľného vrchola už nebude súvislý.
6. V grafe G sú každé dva vrcholy spojené práve jednou cestou.

Úlohy na precvičenie

Úloha 5. Máme graf, obsahujúci aspoň dva vrcholy. Práve jeden vrchol má stupeň 1 a ostatné vrcholy majú stupeň aspoň 2. Dokážte, že tento graf obsahuje cyklus.

Úloha 6. Máme súvislý graf obsahujúci n vrcholov. Jeho hranu nazveme *mostom*, ak po jej odobratí dostaneme nesúvislý graf. V závislosti od prirodzeného čísla n určte, koľko najviac mostov môže mať takýto graf.

Úloha 7. Majme graf G , v ktorom má každý vrchol stupeň 3. Dokážte, že existuje jeho kostra, ktorú keď z neho odstránime, dostaneme graf bez cyklov.

Úloha 8 (BAMO 2005/4). V regióne Kanto je 2018 miest. Niektoré dvojice miest sú spojené cestou, pričom z ľubovoľného mesta sa dá dostať do ľubovoľného iného mesta. Raketový tím vymyslel diabolský plán – niektoré cesty zablokuje Snorlaxom tak, že z každého mesta bude vychádzať nepárny počet ciest, ktoré sú zablokované Snorlaxom. Síce im tento plán prekazia statoční tréneri, ale dokážte, že im ho neprekazí matematika. Dokáže, že je možné cesty zablokovať podľa plánu Raketového tímu.

Úloha 9 (KMS 2002/3-L1-11). Máme mn mrežových bodov usporiadaných do obdĺžnikovej siete $m \times n$ bodov. Spomedzi mrežových bodov je $m+n$ bodov zafarbených načerveno. Každé dva červené body, ktoré sa nachádzajú v rovnakom riadku alebo v rovnakom stĺpci sú spojené červenou čiarou. Dokážte, že sa tam musí nachádzať uzavretá lomená čiara z červených spojnic.

Úloha 10 (KMS 2006/7-Z2-13). V krajine je niekoľko miest a medzi nimi obojsmerné letecké linky (medzi každými dvoma mestami najviac jedna). Medzi každými dvoma mestami sa dá letecky prepraviť tak, že využijeme najviac d liniek. Najkratšia okružná cesta, ktorá sa dá podniknúť, prechádza cez práve $2d + 1$ miest. Dokážte, že z každého mesta v krajine vychádza rovnaký počet liniek.

Úloha 11 (IMO 2006, úloha 2). Nech P je pravidelný 2006-uholník. Jeho uhlopriečka sa nazýva dobrá, ak jej koncové body rozdeľujú hranicu mnoho uholníka P na dve časti, z ktorých každá pozostáva z nepárneho počtu strán. Strany mnoho uholníka P sa tiež považujú za dobré. Predpokladajme, že P je rozdelený na trojuholníky 2003 uhlopriečkami, z ktorých žiadne dve nemajú spoločný bod vo vnútri P . Nájdite maximálny možný počet rovnoramenných trojuholníkov, ktoré majú dve dobré strany.

Úloha 12 (Výberové sústredenie 2017). Uvažujme štvorčekovú mriežku $n \times n$, kde n je kladné celé číslo. V jednom ťahu vyberieme štyri políčka, ktoré ležia na prieniku dvoch riadkov a dvoch stĺpcov a na každé z nich položíme žetón. Tento ťah môžeme spraviť len vtedy, keď aspoň jedno zo štyroch vybraných políčok je prázdne. V závislosti od čísla n určte najväčší počet ťahov, ktorý môžeme spraviť, ak začíname s prázdnu mriežkou.

Náznaky riešení

1 Najmenej dva. Ukážte, že to sú konce najdlhšej cesty. Najviac $n - 1$, viac to zjavne nemôže byť.

3 Použite výsledok úlohy 1 na podstromy zavesené na vrchol stupňa s .

4 Vždy $n - 1$. Použite matematickú indukciu, odstráňte pri nej list.

5 Sporom. Ak by nemal cyklus, je to les a má aspoň dva vrcholy stupňa 1. (Pozor, nemusí to byť strom!)

8 Stačí nám vyriešiť úlohy pre stromy – nadbytočné hrany nám nič nepokazia. Úlohu vhodne zovšeobecňte na prirodzené čísla (aj nepárne) a použite matematickú indukciu. Dokazujte, že strom s párnym počtom vrcholom možno pokryť podľa plánu a strom s nepárnym počtom vrcholov tak, že z práve jedného mesta, ktoré môže byť vybrané ľubovoľne, bude vychádzať párny počet zablokovaných ciest.

9 Reprezentujte si situáciu grafom. Vrcholy sú riadky a stĺpce, teda $m + n$ vrcholov. Hranou spojíme vrchol riadku i a vrchol stĺpca j práve vtedy, ak mrežový bod v i -tom riadku a j -tom stĺpci je červený. Toto je pomerne štandardný spôsob reprezentácie bodov / políčok v mriežke pomocou grafu.

10 Nazvime graf zo zadania G .

- Zvoľte si vrchol v a urobte z neho kosť K najkratších ciest. Čo o nej viete povedať?

- Kostra K má hĺbku d .
- Ktoré vrcholy môžu spájať hrany grafu G , ktoré sa nenachádzajú v kostre K ?
- Môže byť nejaký list kostry K vzdialený od jej koreňa v menej ako d ?
- Dokážte, že všetky listy kostry K majú v grafe G stupeň rovnaký ako vrchol v .
- Ako ukázať, že aj zvyšné vrcholy grafu majú rovnaký stupeň? Zoberte kosť najkratších ciest pre iné vrcholy.

11 Uvažujte graf, vrcholy sú trojuholníky, hrany spájajú trojuholníky, ak zdieľajú nejakú nedobрую hranu.

- Každý vrchol má stupeň 1 alebo 3. Dobré trojuholníky majú stupeň 1.

12 Zafarbíme pri každom ťahu jedno vybrané políčko, ktoré dostalo svoj prvý žetón, nafuchsiovo a zvyšné vybrané políčka, ktoré ešte nie sú zafarbené, na natyrkysovo. Reprezentujte si políčka grafom ako v úlohe 9. Dokážte, že graf odpovedajúci tyrkysovým políčkam je súvislý. Použite na to indukciu cez počet ťahov. Dokazujte, že farebné políčka a tyrkysové políčka rozdeľujú graf na rovnaké komponenty súvislosti po každom ťahu.