

Štvorčekové siete

Jozef Rajník, KMS letné sústreďenie BETA 11. – 18. 6. 2022
pre Bebe k narodeninám :)

Úloha 1. Na štvorčekovej sieti rozmerov 9×9 sa nachádza niekde loď tvaru tetromina L. Na koľko najmenej políčok musíme vystreliť, aby sme loď určite aspoň raz zasiahli?

Úloha 2. Koľko najviac jazdcov možno umiestniť na šachovnicu rozmerov 7×7 tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 3. Koľko najmenej veží musíme umiestniť na šachovnicu rozmerov 8×8 tak, aby bolo možno vybrať 33 z nich tak, aby sa žiadne dve neohrozovali, a to ani po tom, čo zvyšné nevybrané veže odstránime?

Úloha 4 (KMS 17/18-Z3-9). Linoleum na podlahe školskej jedálne tvorí štvorčekovú mriežku $m \times n$ štvorčekov. V každom štvorčeku sa nachádza jeden stôl. Osvetlenie jedálne zabezpečujú lampy, ktoré sa nachádzajú v niektorých mrežových bodoch mriežky (vrátane tých na obvode, všetkých mrežových bodov je teda $(m+1)(n+1)$). Každá lampa osvetľuje stoly na tých štvorčekoch, v ktorých rohoch sa nachádza. V závislosti od prirodzených čísel m, n nájdite najmenší počet lúčpotrebný na to, aby každý stôl bol osvetlený aspoň dvomi lampami.

Úloha 5 (KMS 14/15-2Z-9). Šachovnicu 7×7 kompletne vydláždime dlaždicami tvarov triomina L a tetromina S. Koľko S-kových dlaždíc pri tom môžeme použiť?

Úloha 6 (Zovšeobecnenie KMS 2012/13-L1-8). Nájdite všetky kladné celé čísla n , pre ktoré vieme uložiť čísla 1 až n^2 do štvorčekovej siete $n \times n$ tak, aby v ľubovoľnom T-čku, zloženom zo štyroch políčok, bol súčet čísel párný? T-čko môže byť aj otočené.

Úloha 7 (Zovšeobecnenie KMS 2007/2008-Z2-8). Do tabuľky s veľkosťou $n \times n$ vpíšeme čísla $1, 2, 3, \dots, n^2$, každé práve raz. Nájdite všetky kladné celé čísla n , pre ktoré je pravda, že vždy (teda pre každé vpísanie čísel) vieme z tabuľky vybrať dvojicu políčok susediacich rohom alebo stranou tak, že súčet čísel vpísaných v týchto políčkach bude deliteľný 4?

Úloha 8 (KMS 2017/18-L3-10). V hlavnom meste kolónie dokončujú námestie. Plochu $(2^n+1) \times (2^n+1)$ chcú vydláždiť bielymi a čiernymi dlaždicami rozmeru 1×1 . Dlážditiť musia tak, aby z čiernych dlaždíc nevznikol uzavretý hadík. V závislosti od kladného celého čísla n určte, koľko najviac čiernych dlaždíc môžu použiť?

Poznámka. *Uzavretý hadík* je postupnosť $k \geq 4$ rôznych čiernych dlaždíc $a_1, a_2, \dots, a_k$ takých, že dlaždice a_i a a_{i+1} pre $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ a taktiež dlaždice a_k a a_1 majú spoločnú hranu.