

Úlohy s tabuľkami

Jozef Rajník

Úloha 1 (KMS 15/16-1L-6). Ľudka a Kika si zobrali tabuľku $m \times n$ políčok, kde m, n sú nepárne prirodzené čísla. Každé jej políčko zafarbili namodro alebo načerveno. Ľudke sa páčia *červeno dominantné* riadky. To sú také riadky, ktoré obsahujú viac červených políčok ako modrých. Kika zas obľubuje *modro dominantné* stĺpce, teda také stĺpce, ktoré obsahujú viac modrých políčok ako červených. Ľudka a Kika pri zafarbovaní spolupracovali, aby boli obe spokojné. V závislosti od čísel m, n nájdite najväčší súčet počtu modro dominantných stĺpcov a červeno dominantných riadkov, ktorý Ľudka s Kikou mohli dostať.

Úloha 2 (Matematický Náboj 2015, 10J). Hráme loďky na štvorčekovom papieri rozmerov 9×9 . Náš súper niekde umiestnil svoj Titanic tvaru 5×1 alebo 1×5 štvorčekov. Najmenej koľko krát musíme vystreliť, kým si budeme istí, že sme zasiahli súperov Titanic aspoň raz (vystreliť znamená označiť niektoré políčko z mriežky)?

Úloha 3 (KMS 07/08-Z1-6). V parku je vysadených 10 000 stromov v štvorci 100×100 stromov. Koľko z nich sa dá najviac vyťať tak, aby zo žiadneho pňa nebolo vidieť iný peň?

Úloha 4 (MO 58-B-I-4, kms.sk/ako_riesit/lode/). Na pláne 7×7 hráme hru lode. Nachádza sa na ňom jedna loď 2×3 . Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí. Ak nie, pýtame sa znova. Určte najmenší počet otázok, ktoré potrebujeme, aby sme s istotou loď zasiahli.

Úloha 5 (KMS 10/11-Z1-7). V štáte Obdlžnisipi je mn miest rozmiestnených rovnomerne v pravouhlej mriežke rozmerov $m \times n$, pričom m aj n sú prirodzené čísla. Do každého mesta vedie presne k ciest, ktoré spájajú toto mesto s niekoľkými jeho susednými mestami. Susedné mestá k nejakému mestu sú tie, ktoré sú hore, dole, naľavo alebo napravo od daného mesta (nie diagonálne). Dve mestá môžu byť spojené aj viac ako jednou cestou. *Vyhovujúce* rozmiestnenie ciest je také, že z ľubovoľného mesta sa postupne po cestách vieme dostať do ľubovoľného iného. Určte všetky možné trojice čísel (m, n, k) , pre ktoré existuje nejaké vyhovujúce rozmiestnenie ciest. Zdôvodnite tiež, prečo pre iné trojice vyhovujúce rozmiestnenia neexistujú.

Úloha 6. Na každom políčku tabuľky 8×8 je lampa. Na začiatku sú všetky lampy zhasnuté. V jednom ťahu si vyberieme jednu lampu a jeden smer (buď zvislý, alebo vodorovný) a prepne vybranú lampu a všetkých jej susedov v danom smere. Po istom počte takýchto ťahov ostala svietiť práve jedna lampa. Nájdite všetky možné pozície tejto lampy.

Úloha 7 (KMS 07/08-Z3-9). Dokážte, že čísla $1, 2, \dots, 16$ vieme rozmiestniť na šachovnicu 4×4 tak, že každé použijeme práve raz a rozdiel čísel na ľubovoľných dvoch políčkach susediacich stranou bude najviac 4. Dokážte, že ich nevieme rozmiestniť tak, aby sme opäť každé použili práve raz, ale rozdiel čísel na ľubovoľných dvoch susedných políčkach bol vždy najviac 3.

Zhrnutie použitých metód [SPOILER ALERT!]

Ako získať dolný / horný odhad pri takýchto úlohách?

- Niečo popočítať (počet políčok, farieb), počty musia sedieť, sme odmedzený počtom políčok v tabuľke a pod.
 - Úloha 1 – zrátame, že počet políčok potrebný na dosiahnutie väčšieho výsledku je väčší ako počet políčok v tabuľke.
 - Úloha 5 – spočítame počet vychádzajúcich ciest z čiernych a bielych miest, vieme, že musí byť rovnaký.
- Nájsť niekoľko malých nezávislých oblastí a sčítať odhady pre ne.
 - Úlohy 2 a 4 – napcháme do tabuľky disjunktné lode – do každej musíme streliť aspoň raz.
 - Úloha 3 – rozdelíme si tabuľku na štvorce 2×2 . V každom z nich môžeme vyťať najviac jeden strom.
- Ofarbiť vhodné políčka tabuľky. Ofarbenie možno využiť pri konštrukciách ako pri lodičkách alebo na základe neho si všimnúť nejaký invariant, vlastnosť, ktorá sa nemení počas ťahov-

- Šachovnicové ofarbenie je dosť časté, v úlohe 5 sme pomocou neho vedeli porátať, že mn musí byť párne.
- Kopec iných ofarbení so zaujímavými vlastnosťami
 - * úloha 2: každý obdĺžnik 5×1 obsahuje práve jedno ofarbené políčko,
 - * úloha 4: každý obdĺžnik 2×3 obsahuje aspoň jedno ofarbené políčko,
 - * úloha 6: každý ťah prepína párny počet neofarbených políčk.