

Teória hier

Jozef Rajník

Úloha 1 (Izraelská MO 1995). Dvaja hráči hrajú piškovrky na nekonečnej štvorčekovej sieti. Vyhráva hráč, ktorý ako prvý umiesti 5 svojich symbolov do riadku alebo stĺpca (**pozor, nie do uhlopriečky!**).

Úloha 2. Dvaja hráči hrajú piškovrky na nekonečnej štvorčekovej sieti. Vyhráva hráč, ktorý ako prvý umiesti k svojich symbolov do riadku, stĺpca alebo uhlopriečky. Pre ktoré hodnoty k viete určiť, či má niektorý z hráčov vyhrávajúcu alebo neprehrávajúcu stratégiu?

Úloha 3 (Rusko 2017, 10. ročník, 3). There are 3 heaps with 100, 101, 102 stones. Ilya and Kostya play next game. Every step they take one stone from some heap, but not from same, that was on previous step. They make his steps in turn, Ilya make first step. Player loses if can not make step. Who has winning strategy?

Úloha 4. Domorodci Bruchopasník a Papľuh našli $n > 1$ kusov jedla. Aby si ho rozdelili, hrajú s nimi nasledovnú hru.

Bruchopasník a Papľuh si napíšu do piesku všetky delitele čísla n . Hru začína Bruchopasník a následne sa hráči striedajú v ťahoch. Hráč v jednom svojom ťahu zmaže z piesku ľubovoľné číslo a spolu s ním všetky jeho násobky. Hráč, ktorý zmaže jednotku, prehráva. V závislosti od celého čísla $n > 1$ určte, ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu

Úloha 5 (Rusko 2019, 10. ročník, 2). Pasha and Vova play the following game, making moves in turn; Pasha moves first. Initially, they have a large piece of plasticine. By a move, Pasha cuts one of the existing pieces into three (of arbitrary sizes), and Vova merges two existing pieces into one. Pasha wins if at some point there appear to be 100 pieces of equal weights. Can Vova prevent Pasha's win?

Úloha 6 (1999 USAMO). Juro a Ondro stroskotali na ostrove a teraz sa pretekajú v tom, kto zavolá skôr o pomoc. Na kreslili si do piesku mriežku 1×2000 štvorčekov. Hráč vo svojom ťahu napíše do štvorčeka buď S, alebo O. Juro začína. Vyhráva hráč, po ktorom ťahu bude niekde v mriežke napísané SOS. Pokiaľ sa zaplní celá mriežka bez toho, aby sa to stalo, hra končí remízou.

Úloha 7 (IMO 2015 Shortlist, C4). Let n be a positive integer. Two players A and B play a game in which they take turns choosing positive integers $k \leq n$. The rules of the game are:

- (i) A player cannot choose a number that has been chosen by either player on any previous turn.
- (ii) A player cannot choose a number consecutive to any of those the player has already chosen on any previous turn.
- (iii) The game is a draw if all numbers have been chosen; otherwise the player who cannot choose a number anymore loses the game.

The player A takes the first turn. Determine the outcome of the game, assuming that both players use optimal strategies.

Úloha 8 (IMO Shortlist 2014 C8). Domčo a Mišo hrajú hru. Na stole je rozprestrených 1024 kariet. Na každej karte je nejaká množina cifier desiatkovej sústavy tak, že žiadne dve karty nemajú rovnakú množinu (teda jedna karta je prázdna). Najprv hráči striedavo berú po jednej karte zo stola, Domčo začína. Potom každý hráč zahodí práve jednu svoju kartu. Pokiaľ jednému hráčovi ostanú také karty, že každá cifra sa nachádza na párnom počte jeho kariet, tak ten hráč vyhráva. Pokiaľ sa to však stane obom hráčom, tak je remíza. Dokážte, že prvý hráč má víťaznú stratégiu. Ktorú kartu môže zobrať ako prvý?