

Teória grafov

Jozef Rajník, Letná škola matematiky, 26. 7. 2023

Úloha 1. Večierku sa zúčastnilo niekoľko hostí a niektoré dvojice hostí si spolu zatancovali. Po skončení večierku každý hosť povedal, s koľkými hosťami tancoval. Ktoré z nasledovných odpovedí sme mohli dostať?

- | | | |
|----------------------|-------------------------|----------------------------------|
| a) 4, 3, 2, 2, 1, 0; | c) 6, 4, 3, 3, 2, 2, 1; | e) 6, 6, 5, 4, 2, 2, 1; |
| b) 4, 2, 2, 2, 1, 1; | d) 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1; | f) 8, 7, 7, 6, 3, 2, 2, 2, 2, 1. |

Úloha 2. V triede je n žiakov. Vieme, že každý žiak sa pozná s práve siedmimi žiakmi z tried. Vzťah poznať sa je vzájomný. Určte všetky možné hodnoty n , pre ktoré vie takáto trieda existovať.

Úloha 3. Chceme vytvoriť počítačovú sieť, v ktorej každý počítač bude prepojený káblom s najviac tromi ďalšími počítačmi. Navyše, každé dva počítače vedú medzi sebou komunikovať s využitím najviac dvoch káblov (teda buď na priamo alebo cez jeden počítač, s ktorým sú oba prepojení). Koľko najviac počítačov vieme mať v takejto sieti?

Úloha 4. V krajine je niekoľko miest a medzi niektorými z nich lieta priama obojsmerná letecká linka. Z každého mesta letia aspoň tri linky. Ak si chceme robiť okružný výlet (teda začneme v nejakom meste, cestujeme linkami, pričom linky ani navštívené mestá neopakujeme, až kým sa nedostaneme do počiatočného mesta), tak potrebujeme použiť aspoň 5 liniek. Koľko najmenej miest môže byť v takejto krajine?

Úloha 5 (KMS 07/08-L2-3). Na sústreďení sa stretlo 32 účastníkov. Už pred sústreďením každý poznal okrem seba aspoň 16 z ostatných účastníkov. Dokážte, že týchto účastníkov nevieme rozdeliť na dve (nie nutne rovnako veľké) neprázdne skupiny tak, aby nikto z jednej skupiny nepoznal nikoho z druhej skupiny.

Úloha 6 (KMS 15/16-L3-2). V Kocúrkove je niekoľko miest a medzi niektorými dvojicami miest premáva priama obojsmerná letecká linka. Letecká sieť medzi týmito mestami je *súvislá*, ak sa z každého mesta dá niekoľkými linkami dostať do ľubovoľného iného mesta. Keďže je to však Kocúrkovo, ich letecká sieť nie je súvislá. Starosta sa preto rozhodol pre komplexnú reformu. Nariadil zrušiť všetky letecké linky a zaviedol nové (opäť priame obojsmerné) letecké linky medzi každými dvomi mestami, ktoré pred reformou neboli spojené priamou linkou. Zistite, či bude po tejto reforme letecká sieť Kocúrkova súvislá. Nezabudnite svoje tvrdenie zdôvodniť.

Úloha 7 (KMS 17/18-Z2-2). O sláve Mr. Mira sa dopočuli aj vo Farebnom meste. Zavolali ho, aby im pomohol navrhnuť linky MHD. Vo Farebnom meste majú každú ulicu vymaľovanú jednou z troch farieb: červenou, zelenou alebo modrou. Každá ulica je obojsmerná a spája práve dve križovatky. Z každej križovatky vychádzajú práve tri ulice, z každej farby jedna.

Každá linka MHD má cyklickú trasu. Nemá teda východziu a konečnú zastávku, ale chodí dokola po svojej trase. Pri jednom opakovaní trasy nesmie dvakrát prejsť tou istou ulicou. Dokážte, že je možné v meste zaviesť linky MHD tak, že každou ulicou budú premávať práve dve linky MHD.

Úloha 8 (KMS 18/19-Z1-2). Kika sedí v lietadle a keďže je zhovorčivá, už stihla vyzistiť o ostatných pasažieroch nasledovné: V lietadle je n pasažierov, niektorí sa poznajú (známosti sú vzájomné) a každý pasažier sa cez niekoľko známostí pozná s ľubovoľným iným. Ešte si všimla, že keď rozdelíme pasažierov na ľubovoľné dve neprázdne skupiny, tak určite aspoň v jednej z nich existuje dvojica pasažierov, ktorá sa pozná. Ukážte, že vieme nájsť aspoň troch ľudí, ktorých vieme postaviť do kruhu tak, že každý pozná svojich dvoch susedov.

Úloha 9 (KMS 04/05-Z3-5). 20 členov tenisového klubu sa rozhodlo usporiadať medzi sebou 14 súbojov dvojhry tak, aby každý člen hral aspoň jeden zápas. Dokážte, že spomedzi týchto 14 súbojov vieme vybrať 6 tak, že všetkých 12 hráčov v týchto súbojoch je rôznych.

Úloha 10 (KMS 05/06-Z3-5). Dokážte, že vrcholy každého grafu G , ktorého minimálny stupeň je aspoň 1, možno rozdeliť na dve skupiny tak, že každý vrchol má suseda v druhej skupine ako je on sám.

Úloha 11 (KMS 08/09-L3-6). V meste býva n ľudí (aspoň štyria). Niektorí z nich sa poznajú. Známosti sú vzájomné, to znamená, že ak Jožo pozná Fera, tak aj Fero pozná Joža. Keď si vyberieme ľubovoľných troch rôznych ľudí, tak sa medzi nimi nájde aspoň jeden, ktorý pozná zvyšných dvoch. Nikto v meste však nepozná všetkých ostatných.

- a) Nájdite všetky hodnoty n , pre ktoré môže takéto mesto existovať.
- b) Koľko známostí (dvojíc ľudí, čo sa poznajú) môže existovať v takom meste s n ľuďmi?
- c) Dokážte, že sa všetci ľudia z mesta vedia postaviť do kruhu tak, že každý pozná oboch svojich susedov.

Úloha 12 (KMS 15/16-2L-6). Desať vedúcich KMS je zmrzlinu. Každý z nich má medzi nimi práve 6 kamarátov (kamarátstvo je vzájomné). Zmrzlina obsahuje presne 120 porcií. Vedúci však majú len jednu lyžičku, preto jedia nasledujúcim spôsobom: ten, kto má lyžičku, zje jednu porciu zmrzliny a podá lyžičku nejakému svojmu kamarátovi. Toto sa opakuje, až kým nezjedia celú zmrzlinu. Dokážte, že ak má na začiatku lyžičku ľubovoľný vedúci, tak vedia zjesť zmrzlinu tak, aby každý zjedol 12 porcií.

Úloha 13 (KMS 09/10-L1-7). Na tábore je 100 detí, ktorých si očísľujeme od 1 do 100. Dvojica detí sa nepriatelí práve vtedy, ak rozdiel ich čísel je prvočíslo. Na koľko najmenej družín musíme deti rozdeliť, aby sme nemali družinu obsahujúcu dvoch nepriateľov?

Úloha 14 (KMS 18/19-L2-5). Vedúci Trojstenu používajú na komunikáciu tri rôzne sociálne siete: Facebook, Google Hangouts a Slack. Každá sociálna sieť funguje nasledovne. Každý vedúci má na nej niekoľko priateľov. Priateľstvá sú vzájomné. Profil každého vedúceho má nejakú farbu, nemusí byť rovnaká na všetkých sociálnych sieťach. Pre farby profilov platí, že profily vedúcich, ktorí sú priateľmi, musia mať rôznu farbu. Ďalej vieme, že na Facebooku stačí vedúcim 42 farieb, na Hangouts 47 farieb a na Slacku 17 farieb.

Keďže vedúci majú chaos v sociálnych sieťach, založili si vlastnú sieť – Perfektne Organizovaný Komunikačný Elektronický Chat (skrátene POKEC). Každý vedúci tam má za priateľov svojich priateľov zo všetkých troch pôvodných sietí. Na POKEC-i platia rovnaké pravidlá pre farby profilov. Dokážte, že profilom vedúcich na POKEC-i stačí 33 558 farieb, a to bez ohľadu na to, koľko je vedúcich a ako sa na jednotlivých sieťach priatelia.

Úloha 15 (KMS 17/18-L2-5). V žiadnom správnom cirkuse nesmie chýbať vystúpenie, v ktorom sa niečo reže. V Crazy Monsters Cirkuse rozdeľujú neveriteľnú vec – nekonečný papier. Cirkusant najprv nakreslí na nekonečný papier n trojuholníkov. Trojuholníky môžu byť rôzne a môžu sa prekrývať. Potom papier rozreže po každej strane trojuholníka (reže po úsečke, nie po priamke). V závislosti od kladného celého čísla n určte, koľko najviac kusov papiera tak vie cirkusant papier dostať.

Úloha 16 (KMS 17/18-L1-7). Ježiško má pripravených m rôznych darčiekov, z každého jeden kus. Na svete je n detí ($n \leq m$). Pre kladné celé číslo $i \leq n$, i -te dieťa má z Ježiškových m darčiekov vyhladených d_i darčiekov, po ktorých túži ($1 \leq d_i \leq m$). Ježiško vie, že platí

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_n} \leq 1.$$

Dokážte, že Ježiško môže rozdať deťom po jednom darčeku tak, aby každé dieťa dostalo darček, po ktorom túži.

Domáca úloha

Jej riešenie alebo pokus o riešenie mi viete poslať na jozef.rajnik@trojsten.sk. Taktiež, ak by ste mali k prednáške akékoľvek otázky, tak mi kľudne píšete.

Úloha 17 (KMS 19/20-L1-4). Utiecť sa rozhodlo 16 námorníkov a každý z námorníkov má práve troch kamarátov, pričom kamarátstvo je vzťah vzájomný. Rozhodnite, či možno námorníkov rozdeliť do dvojíc tak, aby každý námorník bol vo dvojici so svojim kamarátom, bez ohľadu na to, ako sa námorníci kamarátia.

Nápovedy k riešeniam

1. Neexistujú:
 - c) nemôže mať tri vrcholy nepárneho stupňa
 - d) vrchol stupňa 7 má len 6 ďalších, s ktorými môže byť spojený
 - e) dva vrcholy stupňa 6 musia byť spojené s každým ostatným, čo poruší stupeň 1. f) z vrcholov stupňov 8, 7, 7, 6 vychádza aspoň $5 + 4 + 4 + 3 = 16$ hrán, ale do zvyšných vrcholov môže vchádzať najviac $3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 14$ hrán
5. Skúste to sporom. Čo by stalo, ak by sme účastníkov tak vedeli rozdeliť? Čo by ste vedeli povedať o takých dvoch skupinách?
6.
 - Áno, bude súvislá. Pre každú dvojicu miest opíšte, ako sa medzi nimi prepraviť.
 - Ak máme mestá X a Y , čo pôvodne neboli spojené priamou linkou, tak teraz sú. Ak X a Y boli pre tým spojené, tak ukážte, že musí existovať mesto Z , ktoré nebolo spojené ani s X , ani s Y .
8.
 - Skúste ísť na to nepriamo. Ukážte, že ak v grafe nie je kružnica, tak existuje rozdelenie pasažierov na dve skupiny také, že každý pasažier pozná len pasažierov z druhej skupiny.
 - Nájdite hľadané rozdelenie na dve skupiny algoritmicky: Začnite ľubovoľným a umiestnite ho do prvej skupiny. Kto potom musí byť v druhej skupine? (Jeho susedia.) A kto zas potom v prvej? Po skonštruovaní takéto rozdelenia nezabudnite dokázať, že je naozaj správne.
9.
 - Môže byť graf súvislý? Koľko komponentov súvislosti môže obsahovať?
 - Dokážte, že graf G s k komponentmi obsahuje aspoň $|V(G)| - k$ hrán. Premyslite si, že z jedného komponentu vieme vždy vybrať hľadanú dvojicu hráčov.
10. Môžete skúsiť indukciu. Ako alternatíva si môžete uvedomiť, že hrany navyše vám neprekážajú. Spravte z grafu stromy a rozdeľte ich do skupín.
11.
 - Môže sa stať, žeby niekto poznal menej ako $n - 2$ ľudí?
 - Každý pozná práve $n - 2$ ľudí. Využite Vetu ?? obmedzenie možných n .
 - Pre párne n , ktoré nám ostanú, existuje len jeden graf, ktorý spĺňa podmienky zo zadania. Stačí teda c) ukázať preň.
12.
 - Všimnite si, že 6 je párne číslo.
 - Graf vedúcich je Eulerovský a súvislý (nezabudnite dokázať aj to). Ak si vedúci pošlú lyžičku 4-krát po Eulerovskom ťahu, tak každý zje 12 porcií. Alternatívne, je takýto graf aj hamiltonovský podľa Diracovej vety.
14.
 - Všimnite si, že $33\,558 = 42 \cdot 47 \cdot 17$. Skúste na základe toho určiť, ako by mohli vyzeráť farby na POKEC-i.
 - Každému profilu na POKEC-i priradte farbu zloženú z troch zložiek podľa toho, aké farby mal na pôvodných sietiach. Napr. ak mal zelenú na Facebooku, červenú na Hangouts a zelenú na Slacku, tak na POKEC-i bude mať zeleno-červeno-zelenú (ktorá je rôzna od zeleno-zeleno-červenej, teda na poradí nám záleží).
16.
 - Nájdite vhodné poradie, v ktorom by ste rozdávali deťom darčeky tak, aby sa nič nepokazilo.
 - Prečísľujte si deti tak, aby platilo $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Sporom ukážte, že pre každé i ($1 \leq i \leq n$) platí $d_i \geq i$, čo zaručuje, že i -te dieťa bude mať vždy aspoň jeden darček voľný.
17.
 - Nie, nie je to možné vždy. Stačí teda nájsť vhodný protipríklad.
 - Nazvime hranu medzi vrcholmi A , B mostom, ak po jej odstránení už nebude existovať cesta medzi vrcholmi A , B . Ukážte, že ak medzi kamarátmi A , B je most, tak musia ísť spolu do člna. Ak teda sa niekto nachádza v dvoch mostoch, tak rozdelenie do člnov nie je možné.