

Teória grafov

Jozef Rajník, Prípravné sústredenie pred IMO a MEMO 2025

1 Prehľad užitočných tvrdení o grafoch

Definície grafu sú rôzne. Najmä sa v nich rozlišuje:

- či sú hrany orientované alebo neorientované;
- či sú dovolené slučky (hrana spájajúca vrchol sama so sebou);
- či sú dovolené násobné hrany.

Užitočnými dôkazovými technikami pri teórii grafov sú:

- Matematická indukcia – treba si však dať pozor na jej riadne použitie. V mnohých úlohách nejde priamo použiť.
- Algoritmické konštruovanie výsledku
- Extremálny princíp – vie zjednodušiť podať

Veta 1. Súčet stupňov vrcholov je rovný dvojnásobku počtu hrán.

Veta 2. V každom grafe je počet vrcholov nepárneho stupňa párny.

Stromy

Veta 3. Nech G je graf s n vrcholmi. Nasledovné tvrdenia sú ekvivalentné

- G je strom, teda súvislý acyklický graf.
- Každé dva vrcholy grafu G sú spojené práve jednou cestou.
- G je súvislý graf, ale po odobraní akejkoľvek hrany už súvislý nebude.
- G je acyklický graf, ale po pridaní ľubovoľnej hrany už acyklický nebude.
- G je súvislý graf s $n - 1$ hranami.
- G je acyklický graf s $n - 1$ hranami.

Z tejto vety vyplývajú dôležité odhady ohľadom cyklov a súvislosti grafu. Súvislý graf musí mať aspoň $n - 1$ hrán a graf s aspoň n hranami musí isto obsahovať cyklus. Do oboch týchto odhadov ešte možno zahrnúť počet komponentov grafu.

Kostra grafu G je podgraf, ktorý je stromom a obsahuje všetky vrcholy grafu G . Každý súvislý graf má kosť. Kostrou možno reprezentovať rôzne prehľadávania grafu, tie majú uplatnenie najmä v informatike, ale možno ich miestami využiť aj v matematike. Pri prehľadávaní grafu je vhodné prehlásiť jeden vrchol kostry za *koreň*. Pomocou neho vieme vyjadriť dôležité vlastnosti prehľadávaní. Ak potrebujeme viac informácií, tak si prehľadávanie vieme predstaviť ako očíslovanie vrcholov podľa poradia ich navštívenia. Poznáme dva základné typy prehľadávaní, ktoré majú nasledovné matematické vlastnosti:

- BFS (prehľadávanie do šírky) je taká kostra T zakorenená v r , že pre každý vrchol v grafu G je (jediná) v - r -cesta v kostre T najkratšou v - r -cestou v grafe G .
- DFS (prehľadávanie do hĺbky) je taká kostra T zakorenená v r , že pre každú hranu uv grafu G je vrchol u pod vrcholom v alebo naopak. Vrchol u je pod vrcholom v , ak v leží na u - r -ceste.

Veta 4. Každý súvislý graf má kosť, BFS kosť aj DFS kosť.

Planárne grafy

Veta 5 (Euler). Nech G je súvislý rovinový graf s v vrcholmi, e hranami, f oblasťami a k komponentami. Potom

$$v - e + f - k = 1.$$

Veta 6 (Kuratowski). Graf G je planárny práve vtedy, keď neobsahuje podgraf, ktorý je subdivíziou grafu K_5 alebo $K_{3,3}$.

Veta 7 (Appel, Haken, veta o 4 farbách). Každý planárny graf je vrcholovo 4-zafarbiteľný

Eulerove ťahy a Hamiltonovské kružnice

Veta 8 (O Eulerovom ťahu). Pre súvislý graf G platí: G obsahuje uzavretý (otvorený) Eulerov ťah práve vtedy, keď G má všetky stupne párne (až na dva vrcholy nepárneho stupňa).

Veta 9 (O orientovanom Eulerovom ťahu). Pre (silno) súvislý orientovaný graf G platí: G obsahuje uzavretý Eulerov ťah práve vtedy, do každého vrchola vchádza rovnako veľa hrán, ako z neho vychádza.

Pri používaní týchto viet si dávajte pozor na **kontrolu súvislosti**!

Silno súvislý je rovnaká vlastnosť, ako súvislý graf – medzi ľubovoľnými vrcholmi u, v existuje cesta z u do v . Treba akurát dbať aj na orientácie hrán. Okrem tejto definície ešte môže byť orientovaný graf *slabo súvislý*, ak po zrušení orientácie hrán dostaneme súvislý graf. (Např. graf s jednou orientovanou hranou je slabo súvislý, ale nie silno).

Veta 10 (Ore). Ak v grafe s n vrcholmi majú každé dva nesusedné vrcholy súčet stupňov aspoň n , tak obsahuje Hamiltonovskú kružnicu.

Bipartitné grafy a párenia

Graf je *bipartitný*, ak možno jeho vrcholy rozdeliť na dve množiny (tzv. partície) tak, aby každá hrana bola medzi vrcholmi z rôznych množín. Užitočnou vlastnosťou bipartitných grafov je, že počet ich hrán vieme vyjadriť ako súčet stupňov v jednej partícii. Teda ich vieme vyjadriť dvomi spôsobmi, z čoho vieme odvodiť rôzne identity, či inak využiť tento vzťah pri riešení úloh

Veta 11 (O bipartitných grafoch). Graf je bipartitný práve vtedy, keď neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.

Párovanie je množina hrán, z ktorých žiadne dve nemajú spoločný vrchol. Párovanie je *perfektné*, pokiaľ je každý vrchol obsiahnutý v nejakej hrane (teda je v práve jednej).

Veta 12 (Hall). Bipartitný graf G s partíciami A, B obsahuje párovanie pokrývajúce množinu A práve vtedy, keď každá podmnožina $X \subseteq A$ má v množine B aspoň $|X|$ susedov.

Veta 13 (Tutte). Graf G obsahuje perfektné párovanie práve vtedy, keď pre každú množinu vrcholov X má graf $G - X$ najviac $|X|$ komponentov súvislosti nepárnej veľkosti.

Farbenia

Veta 14 (Brooks). Nech G je graf s maximálnym stupňom Δ . Nech χ je najmenší počet farieb, ktorý je potrebný na zafarbenie vrcholov grafu G tak, že každé dva susedné vrcholy majú rôznu farbu. Potom

- (i) ak G je úplný graf alebo cyklus nepárnej dĺžky, tak $\chi = \Delta + 1$;
- (ii) inak $\chi \leq \Delta$.

Veta 15 (Vizing). Nech G je graf s maximálnym stupňom Δ . Nech χ' je najmenší počet farieb, ktorý je potrebný na zafarbenie hrán grafu G tak, že každé dve susedné hrany majú rôznu farbu. Potom

$$\Delta \leq \chi' \leq \Delta + 1.$$

Zakázané podgrafy

Veta 16 (Mantel). Graf na n vrcholov, ktorý neobsahuje trojuholník má najviac $n^2/4$ hrán.

Veta 17 (Turán). Graf na n vrcholoch, ktorý neobsahuje $r + 1$ vrcholov, ktoré sú spojené každý s každým, má počet hrán najviac

$$\frac{r-1}{r} \cdot \frac{n^2}{2} = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \cdot \frac{n^2}{2}$$

2 Úlohy na prednášku

Úloha 1. Nech G je 4-regulárny bipartitný súvislý graf. Dokážte, že graf G ostane súvislý aj potom, čo z neho odstránime ľubovoľnú hranu. Platí analogické tvrdenie aj pre odstránenie vrchola?

Úloha 2 (MO61 B-I-5). Nech G je 3-regulárny bipartitný súvislý graf. Dokážte, že graf G ostane súvislý aj potom, čo z neho odstránime ľubovoľnú hranu. Platí analogické tvrdenie aj pre odstránenie vrchola?

Úloha 3 (KMS 17/18-1L-7). Ježiško má pripravených m rôznych darčiekov, z každého jeden kus. Na svete je n detí ($n \leq m$). Pre kladné celé číslo $i \leq n$, i -te dieťa má z Ježiškových m darčiekov vyhladených d_i darčiekov, po ktorých túži ($1 \leq d_i \leq m$). Ježiško vie, že platí

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_n} \leq 1.$$

Dokážte, že Ježiško môže rozdať deťom po jednom darčeku tak, aby každé dieťa dostalo darček, po ktorom túži.

Úloha 4. Dokážte, že každý súvislý 3-regulárny graf G obsahuje takú kosť T , že každá kružnica grafu G má s kosťou T spoločnú aspoň jednu hranu.

Úloha 5 (Rusko, 2001). Na párty je $2n + 1$ ľudí. Vieme, že ak si vyberieme skupinu ľubovoľných n ľudí, tak existuje mimo tejto skupiny účastník párty, ktorý pozná všetkých ľudí z tejto skupiny. Dokážte, že na párty je účastník, ktorý pozná všetkých účastníkov párty.

Úloha 6 (OMM 2009). Na párty je n osôb. Vieme, že medzi ľubovoľnými štyrmi osobami existujú tri osoby, ktoré sa poznajú každá s každou, alebo existujú tri osoby, medzi ktorými sa žiadne dve nepoznajú. Dokážte, že ich vieme rozdeliť na dve skupiny, kde v jednej skupine sa budú všetci poznať a v druhej skupine sa nikto nebude poznať.

Úloha 7 (KMS 2002/3-L1-11). Máme mn mrežových bodov usporiadaných do obdĺžnikovej siete $m \times n$ bodov. Spomedzi mrežových bodov je $m + n$ bodov zafarbených načerveno. Každé dva červené body, ktoré sa nachádzajú v rovnakom riadku alebo v rovnakom stĺpci sú spojené červenou čiarou. Dokážte, že sa tam musí nachádzať uzavretá lomená čiara z červených spojnic.

Úloha 8. Pre dané prirodzené číslo n nájdite najväčšie číslo k také, že možno do kruhu napísať postupnosť núl a jednotiek dĺžky k takú, že žiadna n -tica sa tam nevyskytuje dvakrát.

Úloha 9 (KMS 06/07, 1. zimná séria, úloha 11). Na ostrove žije n domorodcov. jedného dňa náčelník rozhodol, že všetci (vrátane neho) si urobia a budú nosiť náhrdelník zložený z 0 alebo viac jednofarebných kamienkov. Dvaja domorodci majú mať aspoň jeden kamienok rovnakej farby práve vtedy, keď sú priatelia.

a) Dokážte, že domorodci môžu splniť náčelníkov rozkaz.

b) Aký je minimálny počet farieb kamienkov potrebný na to, aby sa dal splniť náčelníkov rozkaz bez ohľadu na priateľské vzťahy na ostrove?

Úloha 10 (MEMO 2021, I-2). Dané sú kladné celé čísla m a n . Niektoré štvorčeky tabuľky $m \times n$ sú zafarbené načerveno. Postupnosť $2r \geq 4$ po dvoch rôznych červených štvorčekoch $a_1, a_2, \dots, a_{2r}$ nazývame *strelecký cyklus*, ak pre každé $k \in \{1, \dots, 2r\}$ ležia štvorčeky a_k a a_{k+1} na diagonále, ale štvorčeky a_k a a_{k+2} neležia na diagonále (pritom $a_{2r+1} = a_1$ a $a_{2r+2} = a_2$). V závislosti od m a n určte najväčší možný počet červených štvorčekov v tabuľke $m \times n$, v ktorej sa nenachádza strelecký cyklus.

(Poznámka. Dva štvorčeky ležia na diagonále, ak priamka prechádzajúca ich stredmi zvierá so stranami tabuľky uhol 45° .)

Úloha 11 (KMS 2017/18-L1-10). V KMS je niekoľko vedúcich a niektoré dvojice sa spolu kamarátia. Namiesto toho, aby si užívali pokojné Vianočné sviatky, sa radšej hádajú, či je krajšia fialová alebo modrá farba. Na začiatku si každý vedúci myslí, že krajšia je fialová. Občas sa stane, že jeden vedúci zorganizuje stretnutie a pozve naň všetkých svojich kamarátov. Po tomto stretnutí sa všetkým zúčastneným vedúcim zmení názor. Je možné, že po niekoľkých stretnutiach si budú všetci vedúci myslieť, že je krajšia modrá? (Bez ohľadu na to, ako sa vedúci kamarátia.)

Úloha 12 (KMS 2017/18-L3-10). V hlavnom meste kolónie dokončujú námestie. Plochu $(2^n + 1) \times (2^n + 1)$ chcú vydláždiť bielymi a čiernymi dlaždicami rozmeru 1×1 . Dlaždiť musia tak, aby z čiernych dlaždíc nevznikol uzavretý hadík. V závislosti od kladného celého čísla n určte, koľko najviac čiernych dlaždíc môžu použiť?

Poznámka. *Uzavretý hadík* je postupnosť $k \geq 4$ rôznych čiernych dlaždíc $a_1, a_2, \dots, a_k$ takých, že dlaždice a_i a a_{i+1} pre $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ a taktiež dlaždice a_k a a_1 majú spoločnú hranu.

Úloha 13 (IMO SL 2013 C3). Šialený vedec zostrojil armádu robotov. Problém je v tom, že niektoré dvojice robotov sa nenávidia (nenávisť je vzájomná). Vždy však s robotmi vie urobiť jednu z nasledujúcich dvoch operácií:

- (i) Ak nejaký robot nenávidí nepárny počet robotov, vedec ho môže zničiť.
- (ii) Vedec môže zdvojnásobiť armádu tak, že každý robot R sa rozdelí na dvoch robotov R_1 a R_2 . Pre každú dvojicu pôvodných robotov R, Q , ktorí sa nenávideli, sa budú nenávidieť aj roboti R_1 a Q_1 , aj roboti R_2 a Q_2 . Roboti R_1 a R_2 sa tiež nenávidia pre každého pôvodného robota R . To sú všetky dvojice robotov, ktoré sa budú nenávidieť po zdvojnásobení.

Dokážte, že vedec vie po konečnom počte operácií dostať armádu robotov, v ktorej neexistuje dvojica robotov, ktorá sa nenávidí.

Úloha 14 (IMO 2019-3). Sociálna sieť má 2019 používateľov. Niektoré dvojice z nich sú priatelia, pričom ak používateľ A je priateľ používateľa B , tak používateľ B je priateľ používateľa A . Opakovane môže nastať takáto udalosť:

Traja (rôzni) používatelia A, B a C sú takí, že A sa priatelí s B aj s C , ale B a C nie sú priatelia. V istom okamihu sa B a C spriatelí a zároveň sa A s B aj s C priatelí prestane. Všetky ostatné vzťahy pritom zostanú zachované.

Na začiatku je 1010 používateľov s 1009 priateľmi a 1009 používateľov s 1010 priateľmi. Dokážte, že existuje postupnosť takýchto udalostí, po ktorých sa každý používateľ bude priatelieť najviac s jedným iným používateľom.

Úloha 15. Máme graf, ktorého každý vrchol má stupeň 3. Dokážte, že takýto graf nemôže obsahovať práve jednu hamiltonovskú kružnicu.

Úlohy na ďalšie precvičovanie

Úloha 16 (KMS 17/18-Z2-2). O sláve Mr. Mira sa dopočuli aj vo Farebnom meste. Zavolali ho, aby im pomohol navrhnuť linky MHD. Vo Farebnom meste majú každú ulicu vymaľovanú jednou z troch farieb: červenou, zelenou alebo modrou. Každá ulica je obojsmerná a spája práve dve križovatky. Z každej križovatky vychádzajú práve tri ulice, z každej farby jedna.

Každá linka MHD má cyklickú trasu. Nemá teda východziu a konečnú zastávku, ale chodí dokola po svojej trase. Pri jednom opakovaní trasy nesmie dvakrát prejsť tou istou ulicou. Dokážte, že je možné v meste zaviesť linky MHD tak, že každou ulicou budú premávať práve dve linky MHD.

Úloha 17 (KMS 04/05-Z3-5). 20 členov tenisového klubu sa rozhodlo usporiadať medzi sebou 14 súbojov dvojhry tak, aby každý člen hral aspoň jeden zápas. Dokážte, že spomedzi týchto 14 súbojov vieme vybrať 6 tak, že všetkých 12 hráčov v týchto súbojoch je rôznych.

Úloha 18 (KMS 19/20-L1-4). Utiecť sa rozhodlo 16 námorníkov a každý z námorníkov má práve troch kamarátov, pričom kamarátstvo je vzťah vzájomný. Rozhodnite, či možno námorníkov rozdeliť do dvojíc tak, aby každý námorník bol vo dvojici so svojim kamarátom, bez ohľadu na to, ako sa námorníci kamarátia.

Úloha 19 (KMS 05/06-Z3-5). Dokážte, že vrcholy každého grafu G , ktorého minimálny stupeň je aspoň 1, možno rozdeliť na dve skupiny tak, že každý vrchol má suseda v druhej skupine ako je on sám.

Úloha 20 (KMS 08/09-L3-6). V meste býva n ľudí (aspoň štyria). Niektorí z nich sa poznajú. Známosti sú vzájomné, to znamená, že ak Jožo pozná Fera, tak aj Fero pozná Joža. Keď si vyberieme ľubovoľných troch rôznych ľudí, tak sa medzi nimi nájde aspoň jeden, ktorý pozná zvyšných dvoch. Nikto v meste však nepozná všetkých ostatných.

- Nájdite všetky hodnoty n , pre ktoré môže takéto mesto existovať.
- Koľko známostí (dvojíc ľudí, čo sa poznajú) môže existovať v takom meste s n ľuďmi?
- Dokážte, že sa všetci ľudia z mesta vedia postaviť do kruhu tak, že každý pozná oboch svojich susedov.

Úloha 21 (KMS 15/16-2L-6). Desať vedúcich KMS je zmrzlinu. Každý z nich má medzi nimi práve 6 kamarátov (kamarátstvo je vzájomné). Zmrzlina obsahuje presne 120 porcií. Vedúci však majú len jednu lyžičku, preto jedia nasledujúcim spôsobom: ten, kto má lyžičku, zje jednu porciu zmrzliny a podá lyžičku nejakému svojmu kamarátovi. Toto sa opakuje, až kým nezjedia celú zmrzlinu. Dokážte, že ak má na začiatku lyžičku ľubovoľný vedúci, tak vedia zjesť zmrzlinu tak, aby každý zjedol 12 porcií.

Úloha 22 (KMS 09/10-L1-7). Na tábore je 100 detí, ktorých si očísľujeme od 1 do 100. Dvojica detí sa nepriatelí práve vtedy, ak rozdiel ich čísel je prvočíslo. Na koľko najmenej družín musíme deti rozdeliť, aby sme nemali družinu obsahujúcu dvoch nepriateľov?

Úloha 23 (KMS 18/19-L2-5). Vedúci Trojstenu používajú na komunikáciu tri rôzne sociálne siete: Facebook, Google Hangouts a Slack. Každá sociálna sieť funguje nasledovne. Každý vedúci má na nej niekoľko priateľov. Priateľstvá sú vzájomné. Profil každého vedúceho má nejakú farbu, nemusí byť rovnaká na všetkých sociálnych sieťach. Pre farby profilov platí, že profily vedúcich, ktorí sú priateľmi, musia mať rôznu farbu. Ďalej vieme, že na Facebooku stačí vedúcim 42 farieb, na Hangouts 47 farieb a na Slacku 17 farieb.

Keďže vedúci majú chaos v sociálnych sieťach, založili si vlastnú sieť – Perfektne Organizovaný Komunikačný Elektronický Chat (skrátene POKEC). Každý vedúci tam má za priateľov svojich priateľov zo všetkých troch pôvodných sietí. Na POKEC-i platia rovnaké pravidlá pre farby profilov. Dokážte, že profilom vedúcich na POKEC-i stačí 33 558 farieb, a to bez ohľadu na to, koľko je vedúcich a ako sa na jednotlivých sieťach priatelia.

Úloha 24. *Fulerén* je planárny graf, ktorého každá oblasť je buď päťuholník, alebo šesťuholník. Koľko päťuholníkov môže obsahovať fullerén?

Úloha 25 (KMS 17/18-L2-5). V žiadnom správnom cirkuse nesmie chýbať vystúpenie, v ktorom sa niečo reže. V Crazy Monsters Circuse rozdeľujú neuveriteľnú vec – nekonečný papier. Cirkusant najprv nakreslí na nekonečný papier n trojuholníkov. Trojuholníky môžu byť rôzne a môžu sa prekrývať. Potom papier rozreže po každej strane trojuholníka (reže po úsečke, nie po priamke). V závislosti od kladného celého čísla n určte, koľko najviac kusov papiera tak vie cirkusant papier dostať.

Úloha 26. Dokážte, že graf, ktorého každý vrchol má stupeň aspoň 3, obsahuje kružnicu párnej dĺžky. Musí obsahovať aj kružnicu nepárnej dĺžky?

Úloha 27. V skupine $n > 6$ detí má každé dieťa práve troch kamarátov (kamarátsvo je vzájomné). Dokážte, že deti možno rozdeliť na dve neprázdne skupiny tak, že každé dieťa v skupine má v nej aspoň dvoch svojich kamarátov.

Úloha 28 (KMS 18/19-Z3-9). V Nemecku je $2n$ miest, z ktorých sú niektoré dvojice spojené cestou (najviac jednou). Každá cesta je zafarbená práve jednou farbou: čiernou, červenou alebo žltou. Z každého mesta vychádzajú práve tri cesty, každá inej farby. Hovoríme, že v Nemecku možno zaviesť *ekonomickú rovnováhu stupňa k* , ak je možné nasledovné:

- Pre každú cestu určíme za jej vlastníka práve jedno z dvoch miest, ktoré spája.
- Ak mesto A vlastní cestu do mesta B , tak mesto B platí mestu A denne x eur, kde x je kladné celé číslo menšie ako k (nie nutne rovnaké pre každú cestu).
- Každé mesto denne zaplatí za prenájom ciest rovnako veľa, ako dostane od iných miest.

V závislosti od celého čísla $n \geq 2$ určte najmenšie celé číslo k také, že v Nemecku možno zaviesť ekonomickú rovnováhu stupňa k , a to bez ohľadu na to, ako sú mestá pospájané cestami.

Úloha 29 (KMS 08/09-L1-9). Nech n je prirodzené číslo, ktoré je aspoň 3. Nech $A_1, A_2, \dots, A_n$ sú navzájom rôzne podmnožiny množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Dokážte, že vždy existuje $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ také, že keď z každej množiny $A_1, A_2, \dots, A_n$ odoberieme x , tak novovzniknuté množiny sú tiež navzájom rôzne. (Ak sa x v niektorej z množín nenachádza, tak táto množina ostane rovnaká.)

Úloha 30 (KMS 10/11-L1-13). Nájdite všetky prirodzené čísla n , pre ktoré sa trojuholník dá rozrezať na n menších trojuholníkov tak, že žiadne tri vrcholy (či už pôvodné alebo novovzniknuté) neležia na jednej priamke a zároveň každý vrchol sa nachádza na rovnakom počte úsečík.

Úloha 31 (KMS 06/07-L1-11). Na nekonečnom bielom štvorčekovom papieri je konečný počet štvorčekov zafarbených čiernou farbou. Každý čierny štvorček má párny počet bielych štvorčekov, ktoré s ním susedia stranou. Dokážte, že vieme každý biely štvorček vyfarbiť zelenou alebo červenou farbou tak, že každý čierny štvorček bude mať rovnaký počet zelených a červených susedov, opäť susediacich celou stranou.

Úloha 32 (KMS 06/07-Z2-13). V krajine je niekoľko miest a medzi nimi obojsmerné letecké linky (medzi každými dvoma mestami nanajvýš jedna). Medzi každými dvoma mestami sa dá letecky prepraviť tak, že využijeme nanajvýš d liniek. Najkratšia okružná cesta, ktorá sa dá podniknúť, prechádza cez práve $2d + 1$ miest. Dokážte, že z každého mesta v krajine vychádza rovnaký počet liniek.

Úloha 33 (KMS 04/03-L1-13). Šéfmág Mazo raz v spánku nechtiac začaroval štvorec čísel a to nasledovne. V magickom štvorci $n \times n$ sú vpísané čísla $1, 2, \dots, n^2$ (každé práve raz). Stredy každých dvoch buniek sú spojené šípkami orientovanými z bunky s menším číslom do bunky s väčším číslom. Dokážte, že súčtom všetkých takýchto vektorov je nulový vektor.

Poznámka: Štvorec považujte za magický, ak súčet čísel v ľubovoľnom riadku alebo stĺpci je rovnaký.

Úloha 34 (KMS 10/11-Z2-14). Množina X má 56 prvkov. Nájdite najmenšie prirodzené n také, že platí nasledovné tvrdenie: Ak vyberieme ľubovoľných 15 podmnožín X takých, že počet prvkov zjednotenia ľubovoľných sedem z nich je aspoň n , potom z týchto 15 podmnožín určite vieme vybrať tri s neprázdny prienikom.

Nápovedy k riešeniam

1. Sporom. Pri odstránení hrany vieme dostať len dva komponenty súvislosti. Aké podmienky musia tieto podmienky spĺňať? Ukážte, že taký komponent ako graf nemôže existovať. Príde vhod využiť vzťah medzi stupňami a hranami v bipartitnom grafe. Pre vrchol to neplatí.
Alternatívne vôbec nepotrebujete predpoklad o bipartitnosti. Len si povedzte, akú špeciálnu vlastnosť má súvislý 4-regulárny graf.
2. Pozrite si hint k predošlej úlohe. Tvrdenie sa dá podobne dokázať aj pre odstránenie vrchola.
3.
 - Nájdite vhodné poradie, v ktorom by ste rozdávali deťom darčeky tak, aby sa nič nepokazilo.
 - Prečísľujte si deti tak, aby platilo $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Sporom ukážte, že pre každé i ($1 \leq i \leq n$) platí $d_i \geq i$, čo zaručuje, že i -te dieťa bude mať vždy aspoň jeden darček voľný.
4. Opíšte spôsob, ako ľubovoľnú kostru viete transformovať na kostru podľa zadania. Teda ako mimo nej rušiť kružnice. Alternatívne si stačí uvedomiť, že vyhovuje kostra nájdená istým prehľadávaním grafu.
5. Nájdite vhodný medzikrok, ktorý dokázať. Ako by mohla vyzeráť posledná úvaha? Ukážte, že tam je K_{n+1} .
6. Nájdite vhodnú lokálnu úpravu, ktorou sa viete približovať k riešeniu. Napr. ak máte kliku a mimo nej hranu, tak možno nájsť väčšiu kliku (pozor, nie je zaručené, že možno kliku zväčšiť).
7. Reprezentujte si situáciu grafom. Vrcholy sú riadky a stĺpce, teda $m+n$ vrcholov. Hranou spojíme vrchol riadku i a vrchol stĺpca j práve vtedy, ak mrežový bod v i -tom riadku a j -tom stĺpci je červený. Toto je pomerne štandardný spôsob reprezentácie bodov / políčok v mriežke pomocou grafu.
8. Hamiltonovská kružnica sa hľadá ťažko. Preto si definujte graf tak, že skúmané n -tice budú jeho hrany a hľadajte Eulerovský ťah. (Orientovaný.)
9. Rozdeľte na páry a nepáry prípad a indukcia na počet hrán.
10.
 - Na horný odhad vieme využiť tvrdenie o stromoch – graf bez cyklu vie mať najviac o 1 hranu menej ako počet vrcholov. Na aký graf by sme chceli toto tvrdenie využiť?
 - Keďže vieme získať odhad na počet hrán, tak chceme, aby červené políčka predstavovali hrany grafu. Chceme teda nájsť dva parametre, ktoré určujú políčko tabuľky. Riadok a stĺpec to však byť nechce – potrebujeme, aby susednosť hrán korešpondovala s pohybmi strelca.
 - Správny graf je bipartitný, ktoré má diagonály jedným smerom ako jednu partíciu a druhú partíciu pre druhý smer diagonál.
 - Ak vám chýba ešte znížiť odhad o 1, tak si uvedomte, že strelci sú čierni a biely. Graf teda nemôže byť súvislý.
11. Použite indukciu. Nevychádza? Povedzte si, čo to znamená a uvedomte si, že vám do dáva dostatok informácií na dokončenie úlohy.
12. Horný odhad: Reprezentujte si situáciu priamočiario ako graf (políčka sú vrcholy) a využite odhad pre počet hrán bez cyklu.
Konštrukcia: Priamočiary odhad naozaj ide dosiahnuť. Využite, že rozmer je mocnina dvojky-ish, na čom sa dobre robí indukcia.

13. • Nájdite vhodnú vlastnosť grafu, ktorú viete týmito operáciou znižovať.
14. • Keďže operácia znižuje počet hrán, tak stačí zaručiť, aby sme ju vždy vedeli vykonať. Zjavne nechceme nikdy dostať izolovanú kliku. Vieme sa jej vyhnúť? Sú ešte iné veci, o ktoré treba dať?
 - Iba vyhýbať sa izolovaným klikám nestačí. Izolované cykly sú tiež problematické. Šikovnou podmienkou na kontrolu je prítomnosť vrchola nepárneho stupňa v každom komponente. To nám už spolu s vylúčením izolovanej kliky stačí.
15. • Hinty vedú k jednému riešeniu. Existuje ešte jeden, ktorý dokazuje všeobecnejšie tvrdenie a hinty zatiaľ k nemu nie sú. Hrany takéhoto grafu možno ofarbiť tromi farbami, tak aby susedné hrany mali rôznu farbu. Čo nám vznikne, keď si vezmeme dve z farieb?
 - Takýchto farbení vie byť pomere veľa. Dve farby vytvárajú sadu niekoľkých kružníc, ktoré pokrývajú všetky vrcholy. Pokiaľ nejde o jednu (teda hamiltonovskú) kružnicu, tak vieme v jednej z kružníc vymeniť prehodiť farby a dostať iné farbenie. Toto nám vie niečo prezradiť o počte všetkých farbení. Dá sa pritom pohrať s paritou.
17. • Môže byť graf súvislý? Koľko komponentov súvislosti môže obsahovať?
 - Dokážte, že graf G s k komponentmi obsahuje aspoň $|V(G)| - k$ hrán. Premyslite si, že z jedného komponentu vieme vždy vybrať hľadanú dvojicu hráčov.
18. • Nie, nie je to možné vždy. Stačí teda nájsť vhodný protipríklad.
 - Nazvime hranu medzi vrcholmi A, B mostom, ak po jej odstránení už nebude existovať cesta medzi vrcholmi A, B . Ukážte, že ak medzi kamarátmi A, B je most, tak musia ísť spolu do člna. Ak teda sa niekto nachádza v dvoch mostoch, tak rozdelenie do člnov nie je možné.
19. Môžete skúsiť indukciu. Ako alternatíva si môžete uvedomiť, že hrany navyše vám neprekážajú. Spravte z grafu stromy a rozdeľte ich do skupín.
20. • Môže sa stať, žeby niekto poznal menej ako $n - 2$ ľudí?
 - Každý pozná práve $n - 2$ ľudí. Využite Vetu ?? obmedzenie možných n .
 - Pre párne n , ktoré nám ostanú, existuje len jeden graf, ktorý spĺňa podmienky zo zadania. Stačí teda c) ukázať preň.
21. • Všimnite si, že 6 je párne číslo.
 - Graf vedúcich je Eulerovský a súvislý (nezabudnite dokázať aj to). Ak si vedúci pošlú lyžičku 4-krát po Eulerovskom ťahu, tak každý zje 12 porcií. Alternatívne, je takýto graf aj hamiltonovský podľa Diracovej vety.
23. • Všimnite si, že $33\,558 = 42 \cdot 47 \cdot 17$. Skúste na základe toho určiť, ako by mohli vyzerať farby na POKEC-i.
 - Každému profilu na POKEC-i priradte farbu zloženú z troch zložiek podľa toho, aké farby mal na pôvodných sietiach. Napr. ak mal zelenú na Facebooku, červenú na Hangouts a zelenú na Slacku, tak na POKEC-i bude mať zeleno-červeno-zelenú (ktorá je rôzna od zeleno-zeleno-červenej, teda na poradí nám záleží).
24. Využite eulerovu vetu. Vyjde len jedno číslo.

26. Z najdlhšej cesty nájdite dve dotýkajúce sa kružnice a uvažujte o paritách.
27. Zoberte najmenší cyklus ako jednu skupinu. Ak má aspoň 5 vrcholov, je to zjavne OK. Ak má menej a nie je OK, priberte doňho ďalšie vrcholy, nie je veľa možností, ako môže vyzeráť situácia.
29. • Ktoré $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ sú nevyhovujúce? Také, pre ktoré existujú *dve* množiny A_i, A_j , pre ktoré platí $A_i = A_j - \{x\}$. Takéto dvojice množín si môžete zaznačiť do grafu. Čo o ňom viete povedať? Čo chcete ukázať?
- Pre každé x zaznačme do hranu len jednu hranu. Ukážte, že takýto graf nemôže mať cyklus. Preto môže mať hrán najviac $n - 1$ a máme voľné x .
30. • Zadané rozdelenie trojuholníka možno priamo reprezentovať planárnym grafom, kde každá z n oblastí je trojuholníková každý vrchol má rovnaký stupeň. Koľko má vrcholov a koľko hrán?
- Počet vrcholov viete vyjadriť pomocou ich stupňa d . Premenné n a d dajte do vzťahu pomocou Eulerovej vety pre planárne grafy. Z toho určte podmienky pre n, d .
31. • Keďže chceme farbiť nejaké biele políčka, tak sa nám oplatí z nich vytvoriť graf. Hranou spojíme tie políčka, ktorú majú mať rôznu farbu. Pri čiernych políčkach, ktoré susedia so štyrmi bielymi políčkami máme viac možností, ktoré budú mať rôznu farbu. Vyberte si takú, aby sme dostali pekný graf, ktorý pôjde ofarbiť dvomi farbami.
- Chceme dostať bipartitný graf, teda graf bez kružnice nepárnej dĺžky. Vyberte taký graf, aby bol planárny. Ukážte, že v každom jeho cykle musí byť párný počet šikmých, vodorovných aj zvislých hrán.
32. • Vezmime si vrchol v , ktorý leží na jednej z najkratších okružných ciest. Prehľadajme z tohto vrchola graf do šírky, dostaneme kostru. Aká je výška tohto stromu (koľko má poschodí)? Zvážte, ako môžu byť vrcholy v kostre prepojené hranami, ktoré do tejto kostry nepatria.
- Kostra z predošlého návodu má d poschodí. Nekostrové hrany môžu spájať len vrcholy na spodnom poschodí. Ukážte, že vrcholy v spodnom poschodí majú rovnaký stupeň ako v („koreň“ kostry).
- Opakovaním tohto postupu pre iný vhodný koreň dostávajúte ďalšie a ďalšie vrcholy s tým istým stupňom a preneste toto na celý graf.
33. • Ako vyzerajú vektory, ktorých súčet je nulový? Vytvorí nám orientovaný graf. Aký?
- Vytvorí orientovaný graf, ktorého každý komponent súvislosti je Eulerovský (teda do každého vrchola vchádza rovnako veľa hrán ako vychádza). No graf, ktorého vrcholy sú políčka štvorca, toto nespĺňa. No napriek tomu možno využiť nejaký iný graf, ktorého komponenty Eulerovské budú. Skúste pohľadať na to vhodné párne číslo.
- Aký je súčet čísel v jednom stĺpci? Koľko vektorov v danom stĺpci končí a koľko začína?
- Spravíme si teda orientovaný graf, ktorého vrcholy sú stĺpce a vektory nám spravia hrany (niektoré hrany môžu byť aj násobné alebo aj slučky). Čo nám tento graf povie o súčte všetkých vektorov? Ten ešte nemusí byť nulový, ale povie nám dostatočne veľa na to, aby zopakovaním úvahy pre riadky nulový súčet dostaneme.

34. • Pre lepšie zoznámenie s úlohou odporúčame ukázať, že $n = 0$ nevyhovuje a $n = 56$ vyhovuje. Pri ukazovaní, že n nevyhovuje nám stačí nájsť vhodnú 15-ticu podmnožín X – takéto podmnožiny budeme nazývať *sporné*. Čo viete povedať o sporných množinách?
- Ukážte, že sporné množiny možno (pre dané n) prerobiť tak, že každý prvok z X je v práve dvoch množinách. Ako uchopiť túto informáciu ďalej?
 - Keďže je v práve dvoch množinách, vieme si definovať graf s násobnými hranami, kde každý prvok z X reprezentujeme ako hranu, ktorá spája dve zo sporných množín (čo sú naše vrcholy), v ktorých sa nachádza.
 - Keďže náš graf má 15 vrcholov a 56 hrán, tak jeho minimálny stupeň je najviac 7. Odhadnite stupeň vrchola v aj pomocou n . Odhad o čom nám dáva podmienka, že zjednotenie ľubovoľných 7 množín má aspoň n prvkov?
 - Koľko hrán sa môže nachádzať v 8-mici vrcholov? V grafe bez nejakého fixného vrcholu v je $56 - \deg(v)$. Nájdite odhad pre tento počet na základe 8-míc.