

Goniometria

Jozef Rajník, lenté sústredenie KMS 4. - 11. 6. 2016, Vyšná Slaná

Veta 1. (*Sínusová veta*). Nech ABC je trojuholník so štandardným označením strán a uhlov a nech R je polomer jemu opísanej kružnice, potom platí

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Veta 2. (*Kosínusová veta*)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Veta 3. *Súčtové vzorce pre goniometrické funkcie.*

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y & \cos(x \pm y) &= \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y \\ \sin x + \sin y &= 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin x - \sin y &= 2 \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ \cos x + \cos y &= 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos x - \cos y &= 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \end{aligned}$$

Veta 4. V trojuholníku ABC označme priesečník osi uhla BAC so stranou BC ako D . Potom platí

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Ľahké úlohy

Úloha 1. Je daný trojuholník ABC , stred strany BC označíme M . Nech na strane AB leží bod P . Označme Q priesečník AM a PC . Dokážte, že ak $|AP| = |PQ|$, tak $|CQ| = |AB|$.

Úloha 2. Majme rovnostranný trojuholník ABC , jeho stred označíme G . Na strane AB leží bod D taký, že $|AG| = |AD|$. Postupne označme E a F priesečníky priamky DG s priamkami AC a BC . Dokážte, že $|DE| = |EF|$.

Ťažšie úlohy

Úloha 3. V rovnobežníku $TUVW$ sú na stranách TU a UV postupne body X a Y tak, že $|TX| = |VY| > 0$. Priamky TY a VX sa pretínajú v bode P . Dokážte, že P leží na osi uhla VWT .

Úloha 4. Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník s priesečníkom uhlopriečok P . Dokážte, že pri štandardnom označení uhlov platí

$$|AP| \cdot \sin \alpha + |CP| \cdot \sin \gamma = |BP| \cdot \sin \beta + |DP| \sin \delta.$$

Úloha 5. Máme daný pravouhlý lichobežník $ABCD$ taký, že $|\angle ABC| = |\angle BCD| = 90^\circ$. Na strane AD leží bod N taký, že $\frac{|AN|}{|ND|} = \frac{|AB|}{|CD|}$ a $|\angle BNC| = 90^\circ$. Dokážte, že $|AB| + |CD| = |AD|$.

Úloha 6. Je daný trojuholník ABC . Nech S je stred strany AB a V jeho ortocentrum. Priamka p je kolmica na SV prechádzajúca bodom V . Jej priesečníky s priamkami AC a BC označme postupne P a Q . Dokážte, že $|VP| = |VQ|$.

Úloha 7. Je daná úsečka AB a reálne číslo λ . Nájdite množinu bodov X v rovine úsečky AB takých, že

$$\frac{|AX|}{|XB|} = \lambda.$$

Veta 5. (*Cévova vaeta*). Nech v trojuholníku ABC body X , Y a Z sú postupne vnútorné body úsečiek BC , CA a AB . Potom priamky AX , BY a CZ sa pretínajú v jednom bode práve vtedy, keď platí

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = 1.$$

Úloha 8. Daný je trojuholník ABC . Na výške AX zvolíme bod P . Nech $K = BP \cap AC$ a $L = CP \cap AB$. Dokážte, že $|\angle AXK| = |\angle AXL|$.

Ťažké úlohy

Úloha 9. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Označme D priesečník osi uhla BAC a úsečky BC a E päť výšky z bodu B na stranu AC . Dokážte, že platí $|\angle CED| > 45^\circ$. [KMS 11/12, 2. zimná séria, úloha 7]

Úloha 10. V trojuholníku ABC je D stred úsečky BC . $|\angle ADB| = 45^\circ$ a $|\angle ACB| = 30^\circ$. Určte veľkosť uhla BAD .

Úloha 11. V kosoštvorci $KLMN$ platí $|\angle KLM| = 40^\circ$. Označme stred strany LM ako S . Päť kolmice na priamku NS prechádzajúcu cez bod K označme X . Zistite veľkosť uhla MXN . [KMS 14/15, 2. letná séria, príklad 6]

Úloha 12. (M-N pravidlo) Nech bod D leží na úsečke BC trojuholníka ABC . Označme $\alpha_1 = |\angle BAD|$, $\alpha_2 = |\angle DAC|$, $|BD| = m$, $|DC| = n$ a $\delta = |\angle BDA|$. Potom platí

$$(m + n) \operatorname{ctg} \delta = m \operatorname{ctg} \alpha_1 - n \operatorname{ctg} \alpha_2 = n \operatorname{ctg} \beta - m \operatorname{ctg} \gamma.$$

Dokážte.

Úloha 13. Miro má doma ostrouhlý trojuholník ABC so stredom opísanej kružnice O . Na jeho polpriamkach AB a AC má postupne uložené body D a E tak, že $|\angle ADO| = |\angle AEO| = 60^\circ$. Prezradil nám ešte, že štvoruholník $BCED$ je tetivový. Čo za trojuholník má Miro doma? Dokážte, že Mirov trojuholník ABC je rovnoramenný alebo $|\angle BAC| = 30^\circ$. [KMS 15/16, 3. letná séria, úloha 9]

Úloha 14. Jožo sa konečne postavil kráľovi ríše geometrie – hrôzostrašnému rovnobežníku $KRAL$ ($|KR| < |RA|$), v ktorom os uhla RKL pretína stranu RA v bode E . Kráľ sa vyznačuje tým, že jeho úsečky LE a RA zvierajú pravý uhol. Obzvlášť nebezpečný je jeho bod F , v ktorom sa pretínajú os uhla ALK a uhlopriečka KA . Ostáva už len jedno – dokážte, že priamky EF a LR sú na seba kolmé. [KMS 15/16, 3. zimná séria, úloha 10]