

Mocnosť bodu ku kružnici

Príklady

1. Kružnice k, l so stredmi K, L sa pretínajú v bodoch A, B . Spoločná dotyčnica kružníc k, l sa ich dotýka v bodoch T, U . Priamka AB pretne ich spoločnú dotyčnicu v bode P . Dokážte, že $|PT| = |PU|$.
2. Na predĺženej tetive KL kružnice k so stredom S leží bod A . Dotyčnice z bodu A ku kružnici k sa jej dotýkajú v bodoch T a U . Označme M stred úsečky TU . Dokážte, že štvoruholník K, L, M, S je tetivový.
3. Nech $ABCD$ je štvoruholník vpísaný do kružnice k taký, že priamky AD a BC sa pretínajú v bode Q . Označme M priesečník priamky BD a rovnobežky s priamkou AC vedenou cez bod Q . Na kružnici k zvolíme bod T tak, aby MT bola dotyčnicou kružnice k . Dokážte, že $|MT| = |MQ|$.
4. Kružnice k, l sa pretínajú v bodoch X, Y . Bodom M vedieme priamky p , resp. q , ktoré pretnú kružnice k , resp. l v bodoch A, B , resp. C, D . Dokážte, že body A, B, C, D ležia na kružnici práve vtedy, keď $M \in \overleftrightarrow{XY}$.
5. (IMO-1995-1) Na priamke p ležia body A, B, C, D v tomto poradí. Kružnice nad priemerami AC, BD sa pretínajú v bodoch X, Y . Na priamke XY zvolíme bod $P (P \in BC)$. Priamka CP pretne kružnicu AC druhýkrát v bode M , priamka BP kružnicu nad BD v bode N . Ukážte, že priamky AM, DN, XY prechádzajú jedným bodom.
6. (IMO-2008-1) Nech H je ortocentrum (priesečník výšok) ostrouhlého trojuholníka ABC . Kružnica k_a so stredom v strede strany BC prechádzajúca bodom H pretína stranu BC v bodoch A_1, A_2 . Podobne definujeme kružnice k_b, k_c a body B_1, B_2, C_1, C_2 . Dokážte, že body $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ ležia na jednej kružnici.
7. Označme AD, BE, CF výšky trojuholníka ABC . Priamky EF, FD, DE pretnú priamky BC, CA, AB postupne v bodoch L, M, N . Ukážte, že body L, M, N ležia na jednej priamke. Na čo je táto priamka kolmá?
8. Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník vpísaný do kružnice so stredom O . Nech P je jeho priesečník uhlopriečok, $Q = AD \cap BC$ a $R = AB \cap CD$. Označme S druhý priesečník kružníc opísaných trojuholníkom ABP a CDP . Ukážte, že body R, P, S ležia na jednej priamke. Potom ukážte, že body Q, S, O ležia na jednej priamke. Bonus: ukážte, že tieto priamky sú na seba kolmé.
9. (60-A-I-3) Sú dané kružnice k, l , ktoré sa pretínajú v bodoch A, B . Označme K, L postupne dotykové body ich spoločnej dotyčnice zvolené tak, že bod B je vnútorným bodom trojuholníka AKL . Na kružniciach k a l zvolíme body N a M tak, aby bod A bol vnútorným bodom úsečky MN . Dokážte, že štvoruholník $KLMN$ je tetivový práve vtedy, keď priamka MN je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku AKL .
10. (55-A-II-3) Daný je trojuholník ABC a vnútri neho bod P . Označme X priesečník priamky AP so stranou BC a Y priesečník priamky BP so stranou AC . Dokážte, že štvoruholník $ABXY$ je tetivový práve vtedy, keď druhý priesečník (rôzny od bodu C) kružníc opísaných trojuholníkom ACX a BCY leží na priamke CP .