

Geometria trojuholníka

Jozef Rajník, Letné sústredenie KMS ALFA 16. – 23. 6. 2019, Zlaté kopyto

Nasledujúce úlohy sú o základných tvrdeniach, ktoré platia v trojuholníku. Ich vyriešenie je dobrým cvičením. Ich znalosť je užitočná pri riešení zložitejších úloh – vie nám pomôcť, ak si spomenieme, že tento bežný uhol má presne takú veľkosť, ktorú sme niekde inde dostali a pod. Môžeme tak robiť väčšie myšlienkové kroky pri hľadaní riešenia.

Všetky nasledovné úlohy pracujú s trojuholníkom ABC . Používame v ňom štandardnú notáciu:

- O je stred opísanej kružnice.
- I je stred vpísanej kružnice.
- H je priesečník výšok (ortocentrum).
- Vnútorné uhly označujeme α, β, γ a dĺžky strán označujeme a, b, c .

V niektorých úlohách sa vyskytuje *pripísaná kružnica k strane BC trojuholníka ABC* . To je taká kružnica, ktorá sa nachádza mimo trojuholníka ABC , dotýka strany BC a priamok AB, AC . Jej stred nájdeme podobne ako stred vpísanej kružnice: leží na priesečníku osí vnútorného uhla BAC a osí vonkajších uhlov ABC a ACB .

V mnohých úlohách máme určiť veľkosť nejakého uhla alebo dĺžku strany. Určujte tieto hodnoty pomocou strán a uhlov trojuholníka ABC .

1 Základné pozorovania

Vpísaná kružnica

Úloha 1.1. Nech K je priesečník osí uhla BAC so stranou BC . Určte veľkosť uhlov AKB a AKC .

Úloha 1.2. Určte veľkosti uhlov AIB, BIC, CIA .

Úloha 1.3. Nech $X = AI \cap BC, Y = BI \cap CA$ a $Z = CI \cap AB$. Určte veľkosti uhlov $BIX, XIC, CIY, YIA, AIZ, ZIB$.

Úloha 1.4. Nech r je polomer kružnice vpísanej trojuholníku ABC a s je polovica jeho obvodu. Dokážte, že pre jeho obsah platí $S = sr$.

Úloha 1.5. Nech K, L, M sú postupne body dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ABC so stranami BC, CA, AB . Dokážte, že priamky AI a LM sú na seba kolmé.

Úloha 1.6. Nech K, L, M sú postupne body dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ABC so stranami BC, CA, AB . Určte dĺžky úsečiek BK, KC, CL, LA, AM, MB .

Úloha 1.7. Nech K, L, M sú postupne body dotyku kružnice pripísanej k strane BC trojuholníka ABC s priamkami BC, CA, AB . Určte dĺžky úsečiek BK, KC, CL, LA, AM, MB .

Úloha 1.8. Nech D je bod dotyku kružnice vpísanej so stranou BC, F bod dotyku kružnice pripísanej k strane BC so stranou BC a nech DE je priemer kružnice vpísanej ABC . Dokážte, že

- a) body A, E, F ležia na priamke;
- b) $|BD| = |FC|$.

Opísaná kružnica a tetivové štvoruholníky

„Podstatou každého geometrického problému je najít“

Úloha 1.9. Určte veľkosti uhlov AOB, BOC a COA .

Úloha 1.10. Určte polomer R kružnice opísanej trojuholníku ABC .

Úloha 1.11. Nech P_A , P_B a P_C označujú postupne päty výšok na strany BC , CA a AB trojuholníka ABC . Dokážte, že štvorice bodov (B, C, P_B, P_C) , (C, A, P_C, P_A) , (A, B, P_A, P_B) , (A, P_B, P_C, H) , (B, P_C, P_A, H) a (C, P_A, P_B, H) ležia na kružniciach (každá štvorica na nejakej, nemusia to byť tie isté kružnice).

Výšky

Úloha 1.12. Dokážte, že priamky AO a AH sú osovo súmerné podľa priamky AI .

Úloha 1.13. Nech D , E a F označujú postupne päty výšok na strany BC , CA a AB trojuholníka ABC . Určte veľkosti uhlov AHE , BHF a CHD .

2 Švrkov a antišvrkov bod

Úloha 2.1. Nech E_A je stred kružnice pripísanej k strane BC . Dokážte, že body I, B, C, E_A ležia na kružnici.

Úloha 2.2. Dokážte, že os strany BC a os uhla BAC sa pretínajú na kružnici opísanej trojuholníku ABC , presnejšie v strede oblúka BC , ktorý neobsahuje bod A .

Poznámka. Ich spoločný priesečník sa neformálne v komunite česko-slovenských matematikov nazýva *Švrkov bod* (presnejšie *Švrkov bod prislúchajúci k strane a*) a značí sa $\check{S}$, resp. $\check{S}_A$.

Úloha 2.3. Dokážte, že os strany BC a os uhla vonkajšieho uhla BAC sa pretínajú na kružnici opísanej trojuholníku ABC , presnejšie v strede oblúka BC , ktorý obsahuje bod A .

Poznámka. Ich spoločný priesečník sa ešte menej formálnejšie v komunite česko-slovenských matematikov nazýva *Antišvrkov bod* (presnejšie *Antivvrkov bod prislúchajúci k strane a*) a značí sa $\check{N}$, resp. $\check{N}_A$.

Úloha 2.4. Dokážte, že stred kružnice cez body I, B, C, E_A z úlohy 2.1 je $\check{S}_A$.

Úloha 2.5. Nech D, E, F sú postupne päty výšok trojuholníka ABC na strany a, b, c . Dokážte, že H je stred kružnice vpísanej trojuholníku DEF .

Úloha 2.6. V ostrouhlom trojuholníku ABC označme D päť výšky na stranu BC a P, Q, R, S postupne päty kolmíc z bodu D na priamky AB, AC, BH, CH .

a) Dokážte, že body B, C, P, Q ležia na jednej kružnici.

b) Dokážte, že body P, Q, R, S ležia na jednej priamke.

Úloha 2.7. Nech K, L, M sú postupne body dotyku vpísanej kružnice so stranami BC, CA, AB . Nech P je priesečník CI a LM . Dokážte, že body B, K, I, P, M ležia na kružnici.

Úloha 2.8. Uvažujme všetky trojuholníky s pevnou opísanou a vpísanou kružnicou. Dokážte, že trojuholníky z ich antišvrkov majú pevné ťažisko.

3 Úlohy na aplikáciu poznatkov

Úloha 3.1. Zostrojte trojuholník ABC , ak poznáte jeho obvod, veľkosť uhla ABC a polomer kružnice pripísanej k strane BC .

Úloha 3.2. V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole A je M päť kolmice z bodu A na stranu a . Body K, L ležia postupne na stranách AC, AB , tak, že platí $2|CK| = |AK|$ a $2|AL| = |BL|$. Dokážte, že body K, A, L, M ležia na kružnici.

Úloha 3.3 (64MO-A-I-5). V danom trojuholníku ABC označme D bod dotyku kružnice vpísanej so stranou BC . Kružnica vpísaná trojuholníku ABD sa dotýka strán AB a BD v bodoch K a L . Kružnica vpísaná trojuholníku ADC sa dotýka strán DC a AC v bodoch M a N . Dokážte, že body K, L, M, N ležia na jednej kružnici.

Úloha 3.4 (63MO-A-I-3). Označme I stred kružnice vpísanej do daného trojuholníka ABC . Predpokladajme, že kolmica na priamku CI vedená bodom I pretína priamku AB v bode M . Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku ABC pretína úsečku CM v jej vnútornom bode N a že priamky NI a MC sú na seba kolmé.

Úloha 3.5 (IMO Shortlist 2005). V trojuholníku ABC , v ktorom platí $|AB| + |BC| = 3|AC|$ sa vpísaná kružnica so stredom v bode I dotýka strán AB a BC postupne v bodoch D , E . Nech K , L sú postupne obrazy bodov D , E v stredovej súmernosti so stredom I . Dokážte, že štvoruholník $ACKL$ je tetivový.

Úloha 3.6 (Matematický náboj 2017m 21). Máme kružnicu k so stredom M a priemerom AB . Body C a D ležia na kružnici k tak, že platí $AC \perp DM$ a $|\angle MAC| = 56^\circ$. Zistite veľkosť ostrého uhla medzi priamkami AC a BD v stupňoch.

Úloha 3.7. Švrčkovým bodom $\check{S}_A$ v trojuholníku ABC vedieme polpriamky p a q , ktoré pretnú stranu BC postupne v bodoch X a Y a kružnicu opísanú trojuholníku ABC pretnú postupne v bodoch Z a W . Dokážte, že body X , Y , Z , W ležia na jednej kružnici.

Úloha 3.8. Je daný trojuholník ABC s opísanou kružnicou k . Kružnica l sa dotýka zvnútra kružnice k v bode A a strany BC sa dotýka v bode D . Dokážte, že AD je os uhla BAC .

Úloha 3.9. Kružnice k_1 a k_2 sa dotýkajú zvonka v bode T a obe sa dotýkajú zvnútra kružnice k postupne v bodoch R a S . Nech Q je druhý priesečník priamky RT a kružnice k . Dokážte, že $|\angle QST| = 90^\circ$.

Úloha 3.10 (KMS 2016/17, 3. letná séria, 9). Š nie je uznávaným čarodejníkom Krajiny osí ôs len tak pre nič za nič. Je majstrom v čarovaní osí. Jeho najsilnejšie kúzlo pozostáva z trojuholníka ABC . Os uhla CAB pretína stranu BC v bode L a os uhla CBA pretína stranu AC v bode K . Os úsečky (teda os osí) BK pretína priamku AL v bode M . Bod N leží na priamke BK tak, že priamky LN a MK sú rovnobežné. Dokážte, že $|LN| = |NA|$.

Úloha 3.11 (IMO 2006). Nech ABC je trojuholník so stredom vpísanej kružnice I . Vnútri trojuholníka ABC leží bod P , pre ktorý platí

$$|\angle PBA| + |\angle PCA| = |\angle PBC| + |\angle PCB|.$$

Ukážte, že platí $|AP| \geq |AI|$, pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $P = I$.

Úloha 3.12 (IMO 2002). Nech BC je priemer kružnice ω so stredom v bode O . Nech A je bod na kružnici ω taký, že $|\angle AOB| < 120^\circ$. Nech D je stred oblúka AB kružnice ω , ktorý neobsahuje bod C . Ďalej priamka vedená cez bod O rovnobežná so stranou DA pretína priamku AC v bode I a os úsečky OA pretína kružnicu ω v bodoch E a F . Dokážte, že I je stred vpísanej kružnice trojuholníku DEF .

Úloha 3.13 (IMO 2004). Nech ABC je ostrouhlý trojuholník, v ktorom $|AB| \neq |AC|$. Kružnica nad priemerom BC pretína strany AB a AC postupne v bodoch M a N . Označme ako O stred strany BC . Vnútorné osi uhlov BAC a MON sa pretínajú v bode R . Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkmi BMR a CNR sa druhýkrát pretínajú na strane BC .

Úloha 3.14 (IMO 1992). V rovine je daná kružnica k , priamka p , ktorá sa jej dotýka, a bod M ležiaci na priamke p . Nájdite množinu všetkých bodov A takých, pre ktoré existujú body B , C ležiace na priamke p také, že M je stredom úsečky BC a k je kružnica vpísaná trojuholníku ABC .

Úloha 3.15 (USAMO 1999). Nech $ABCD$ je rovnoramenný lichobežník s $AB \parallel CD$. Kružnica vpísaná trojuholníku BCD sa dotýka strany CD v bode F . Nech F je bod na osi (vnútorného) uhla DAC taký, že $EF \perp CD$. Nech kružnica opísaná trojuholníku ACF pretína priamku CD v bodoch C a G . Dokážte, že trojuholník AFG je rovnoramenný.

Úloha 3.16 (MO 62-A-III). V rovnobežníku $ABCD$ so stredom S označme I stred kružnice vpísanej trojuholníku ABD a T bod jej dotyku s uhlopriečkou BD . Dokážte, že priamky IS a CT sú rovnobežné.

Úloha 3.17 (64MO-A-I-5). V danom trojuholníku ABC označme D bod dotyku kružnice vpísanej so stranou BC . Kružnica vpísaná trojuholníku ABD sa dotýka strán AB a BD v bodoch K a L . Kružnica vpísaná trojuholníku ADC sa dotýka strán DC a AC v bodoch M a N . Dokážte, že body K , L , M , N ležia na jednej kružnici.

Úloha 3.18 (63MO-A-I-3). Označme I stred kružnice vpísanej do daného trojuholníka ABC . Predpokladajme, že kolmica na priamku CI vedená bodom I pretína priamku AB v bode M . Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku ABC pretína úsečku CM v jej vnútornom bode N a že priamky NI a MC sú na seba kolmé.

4 Ďalšie užitočné tvrdenia (aj pokročilé)

Izogonály

V úlohe 1.12 sme našli dve priamky, ktoré sú osovo súmerné podľa osi uhla BAC . Takáto dve priamky sa nazývajú *izogonálne* vzhľadom k uhlu BAC a majú tiež zaujímavé vlastnosti.

Úloha 4.1. Dokážte, že izogonálne priamky vzhľadom k uhlu BAC v trojuholníku ABC pretínajú kružnicu jemu opísanú v bodoch rôznych od bodu A , ktoré sú osovo symetrické podľa osi úsečky BC .

Ďalšou zaujímavou dvojicou izogonálnych priamok je ťažnica a jej obraz v osovej súmernosti podľa osi uhla BAC , ktorý sa nazýva *symediána*. Jednu jej peknú vlastnosť ilustruje nasledovná úloha

Literatúra

[1] Yufei Zhao: *Lemmas in Euclidean Geometry*, <http://yufeizhao.com/olympiad/geolemmas.pdf>

Náznaky riešení

1.1 Dopočítaním z trojuholníkov dostaneme $|\sphericalangle AKB| = 180^\circ - \alpha/2 - \beta = \alpha/2 + \gamma$, podobne $|\sphericalangle AKC| = \alpha/2 + \beta$.

1.2 $90^\circ + \alpha/2$, $90^\circ + \beta/2$, $90^\circ + \gamma/2$.

1.3 $|\sphericalangle BIX| = |\sphericalangle YIA| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$ a zvyšné analogicky.

1.4 Osi uhla od vrcholu po I rozdelia $\triangle ABC$ na tri trojuholníky s výškou r . Ich strany poznáme.

1.5 $\triangle AIM \cong \triangle AIL$ (spoločná strana AI a zhodné uhly). Preto $|AM| = |AL|$ a z rovnoramenného $\triangle AML$ máme $|\sphericalangle AML| = 90^\circ - \alpha/2$.

1.6 Využite, že ak máme dve pretínajúce sa dotýčnice k jednej kružnici, tak vzdialenosti od ich prieniku k bodom dotyku sú rovnaké. Máme teda tri neznáme vzdialenosti, zostavte pre ne sústavu troch rovníc.

$$|AL| = |AM| = \frac{b+c-a}{2}, \quad |BM| = |BK| = \frac{c+a-b}{2}, \quad |CK| = |CL| = \frac{a+b-c}{2}.$$

1.7 Podobne ako v predchádzajúcej úlohe

$$|AL| = |AM| = \frac{a+b+c}{2}, \quad |BM| = |BK| = \frac{a+b-c}{2}, \quad |CK| = |CL| = \frac{a+c-b}{2}.$$

1.8 Uvažujte rovnoláhlosť so stredom v bode A , ktorá zobrazí vpísanú kružnicu na pripísanú. Časť b) vyjde priamočiario z predchádzajúcich výsledkov.

1.9 Využite obvodový a stredový uhol. Uhly vyjdú 2γ , 2α a 2β .

1.10 Z pravouhlého trojuholníka AOS_A (S_A je stred strany a): $R = a/(2\sin\alpha)$. Ak ho vyjadríme pomocou zvyšných strán, dostávame rovnosť známu ako *sínusová veta*:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

1.11 Sú to tálesové kružnice vďaka pravým uhlom pri päťoch výšok.

1.12 Všimnite si, že $|\sphericalangle BAH| = |\sphericalangle CAO| = 90^\circ - \beta$.

1.13 $|\sphericalangle AHE| = \gamma$, $|\sphericalangle BHF| = \alpha$, $|\sphericalangle CHD| = \beta$.

2.1 Osi vonkajšieho a vnútorného uhla sú na seba kolmé ($BI \perp BE_A$). Ide teda o tálesovu kružnicu.

2.2 Nech sa v $\check{S}$ pretínajú os BC a kružnica opísaná ABC . Rovnaké uhly z rovnoramenného trojuholníka $\check{S}BC$ sa cez obvodové uhly prenesú na $|\sphericalangle \check{S}AB| = |\sphericalangle \check{S}AC|$, teda $\check{S}A$ je os uhla pri A .

2.3 Analogicky ako v predchádzajúcej úlohe: $|\sphericalangle \check{N}AC| = |\sphericalangle \check{N}BC| = 90^\circ - \alpha/2$.

2.4 Dokážte, že $|\check{S}_A I| = |\check{S}_A B|$ prostým vyuhlením: $|\sphericalangle \check{S}_A BI| = |\sphericalangle \check{S}_A IB|$.

2.5 Stačí ukázať, že DH je os uhla FDE . Využijeme, tetivové štvoruholníky $BDHF$ a $CDHE$ (úloha 1.11) a uhly okolo H (úloha 1.13). Dostaneme $|\sphericalangle FDB| = |\sphericalangle EDC| = \alpha$.

2.6 $APDQ$ je tetivový štvoruholník, preto $\gamma = |\sphericalangle QDA| = |\sphericalangle APQ|$. Z toho máme a). Navyše $|\sphericalangle QPD| = 90^\circ - \gamma$. Z tetivovosti $BDPR$ zas $|\sphericalangle RPD| = |\sphericalangle RBD| = 90^\circ - \gamma$. Z toho sú P , R , Q na priamke. Zo symetrie aj P , S , Q .

2.7 Body B, K, I, M ležia na tálesovej kružnici nad BI . To, že tam leží aj P vyjde po vyjadrení $|\angle CPL| = \beta/2$ a následnej vety o obvodovom uhle (ak P je vnútri $\triangle ABC$), resp. protiľahlých uhlov v kružnici (ak je P vonku), resp. $P \equiv M$. Treba si dať pozor na rozlíšenie týchto prípadov.

3.3 Ukážte, že osi strán štvoruholníka $KLMN$ sa pretínajú v jednom bode – využite pri tom vzdialenosti od vrchola k bodom dotyku. Osi KL a MN sú osi uhol β a γ . Na to stačí ukázať, že D je stred LM .

3.4 Kružnica BIC (t. j. kružnica prechádzajúca týmito troma bodmi) má sa stred vo švrčkovom bode, teda sa dotýka priamky MI . Podobne, sa jej dotýka tálesova kružnica nad priemerom AI . Označme jej priesečník s kružnicou ABC ako N' . Primaky BC, MI a AN' sú chordály kružníc ABC, BIC a AIN' . Z toho vyplýva, že $N' \equiv N$.

3.5 Nech $F = CK \cap AB, G = AL \cap BC$, spočítajte, že $|BE| = |BD| = |AC| = |AF| = |CG|$. Douhľite s využitím uhlov v rovnoramenných trojuholníkoch ACG a ACF .

3.14 Nech D je bod dotyku k a p , nech D' je jeho obraz v stredovej súmernosti cez stred M a nech DF je priemer k . Podľa lemy ?? musí D' ležať na priamke AF . Všetky body na na polpriamke opačnej k FD' bez bodu F vyhovujú.

3.15 Nech H je bod dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ACD so stranou CD . Podľa lemy ?? je tak E bod dotyku pripísanej kružnice, a následne F musí byť jej stredom. Ďalej sa len vyuhľí.

3.17 Ukážte, že osi strán štvoruholníka $KLMN$ sa pretínajú v jednom bode – využite pri tom vzdialenosti od vrchola k bodom dotyku. Osi KL a MN sú osi uhol β a γ . Na to stačí ukázať, že D je stred LM .

3.18 Kružnica BIC (t. j. kružnica prechádzajúca týmito troma bodmi) má sa stred vo švrčkovom bode, teda sa dotýka priamky MI . Podobne, sa jej dotýka tálesova kružnica nad priemerom AI . Označme jej priesečník s kružnicou ABC ako N' . Primaky BC, MI a AN' sú chordály kružníc ABC, BIC a AIN' . Z toho vyplýva, že $N' \equiv N$.

4.1 Z izogonálnosti máme $|\angle KAS| = |\angle LAS|$, teda tetivy $KŠ$ a $ŠL$ sú rovnako dlhé a $KŠLS$ (S je stred BC) je deltoid – ten má na seba kolmé uhlopriečky.