

Goniometrické vzorce

Jozef Rajník, 7. 3. 2021

Základným vzorcom bude nasledovný:

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y.$$

Pomocou neho možno odvodiť nasledovné vzorce:

Súčtové a rozdielové vzorce:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

Prevod medzi súčtom a súčinom:

$$\begin{aligned} \sin x \sin y &= \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y)) & \sin x \pm \sin y &= 2 \cdot \sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right) \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2}(\sin(x + y) - \sin(x - y)) & \cos x + \cos y &= 2 \cdot \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x - y}{2}\right) \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y)) & \cos x - \cos y &= -2 \cdot \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x - y}{2}\right) \end{aligned}$$

Dvojnásobný a polovičný argument:

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \cdot \sin x \cdot \cos x & \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} & \left|\sin \frac{x}{2}\right| &= \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x & \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} & \left|\cos \frac{x}{2}\right| &= \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \\ \tan 2x &= 2 \cdot \frac{\tan x}{1 - \tan^2 x} & & & \tan \frac{x}{2} &= \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \end{aligned}$$

Úloha 1. Dokážte, že číslo

$$\sin 5^\circ \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 55^\circ \cdot \sin 65^\circ \cdot \sin 75^\circ \cdot \sin 85^\circ$$

je racionálne.

Úloha 2 (AIME 2008 II, 8). Nech $a = \pi/2008$. Existuje také kladné celé číslo n , pre ktorý je súčet

$$2[\cos(a) \sin(a) + \cos(4a) \sin(2a) + \cos(9a) \sin(3a) + \cdots + \cos(n^2 a) \sin(na)]$$

celým číslom?

Úloha 3 (AIME 2006 I, 12). V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$\cos^3 3x + \cos^3 5x = 8 \cos^3 4x \cos^3 x.$$

Úloha 4 (AIME 2000; II, 15). Nájdite najmenšie kladné celé číslo n , pre ktoré platí

$$\frac{1}{\sin 45^\circ \sin 46^\circ} + \frac{1}{\sin 47^\circ \sin 48^\circ} + \cdots + \frac{1}{\sin 133^\circ \sin 134^\circ} = \frac{1}{\sin n^\circ}.$$

Úloha 5 (MO63 Výberové sústredenie, ú. 5). Označme α, β, γ uhly trojuholníka ABC . Dokážte, že ak platí

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma} = \sqrt{3}$$

tak potom má jeden z uhlov trojuholníka ABC veľkosť 60° .