

Orientované uhly

Jozef Rajník, Výtoky 7. – 14. 7. 2021

Definícia 1. Orientovaný uhol medzi priamkami p a q nazývame uhol, o ktorý treba otočiť v kladnom smere priamku p , aby po otočení bola rovnobežná s priamkou q . Označujeme ho $\sphericalangle(p, q)$.

Definícia 2. Nech A, B, V sú tri navzájom rôzne body. *Orientovaný uhol AVB modulo 180°* je uhol, o ktorý treba otočiť priamku VA , aby bola rovnobežná s priamkou VB . Tento uhol označujeme $\sphericalangle AVB$.

Tvrdenie 1. 1. $\sphericalangle ABC \equiv -\sphericalangle CBA$

2. $\sphericalangle ASC \equiv \sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC$

3. $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB \equiv 0^\circ$ (súčet uhlov v trojuholníku)

4. Pre rovnoramenný trojuholník so základňou BC : $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BCA \equiv -\frac{1}{2}\sphericalangle CAB$

Tvrdenie 2 (o súhlasných a striedavých uhloch). Priamky AB a CD sú rovnobežné práve vtedy, keď

$$\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB.$$

Tvrdenie 3 (o obvodovom o stredovom uhle). Nech body A, B, C ležia na kružnici so stredom O . Potom

$$\sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle ACB.$$

Tvrdenie 4 (o tetivových štvoruholníkoch). Štyri body A, B, C, D ležia na kružnici práve vtedy, keď

$$\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle CBD.$$

Úloha 1. Nech P, Q, R sú postupne päty výšok trojuholníka ABC a H je jeho ortocentrum. Okolo ortocentra je 6 uhlov. Vyjadrite ich veľkosti pomocou $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ a $\sphericalangle BCA = \gamma$.

Úloha 2. Máme dané dve kružnice k a l , ktoré sa pretínajú v bodoch X a Y . Bodom X vedieme priamku, ktorá pretne kružnice k a l postupne v bodoch A a C . Podobne vedieme priamku aj bodom Y , ktorá pretne kružnice k a l postupne v bodoch B a D . Dokážte, že $AB \parallel BC$.

Úloha 3. Majme trojuholník ABC . Nech K a L sú päty kolmíc spustených z bodu A postupne na osi uhlov ABC a BCA . Dokážte, že $KL \parallel BC$.

Úloha 4. V trojuholníku ABC označíme L a M postupne body dotyku vpísanej kružnice so stranami AC a AB . Stred vpísanej kružnice je I . Priesečník priamky CI a ML označíme P . Dokážte, že body M, P, I, B ležia na kružnici.

Úloha 5. Priamky p, q sa pretínajú v bode S . Ďalej sú dané body A, B také, že $\sphericalangle(p, SA) = \sphericalangle(SB, q)$. Päty kolmíc z bodov A, B na priamku p označme postupne A_p a B_p a podobne, päty ich kolmíc na priamku q ako A_q, B_q . Dokážte, že body A_p, A_q, B_p, B_q ležia na jednej kružnici.

Úloha 6 (Miquelova veta). Je daný trojuholník ABC . Na priamkach BC, CA, AB postupne ležia body X, Y, Z . Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkmi AYZ, XBZ a XYC prechádzajú jedným bodom.

Úloha 7 (Lemma o spirálnej podobnosti). Kružnice k_1 a k_2 sa pretínajú v bodoch X a Y . Priamka prechádzajúca bodom X pretína k_1 a k_2 po druhýkrát v bodoch A a B . Druhá priamka prechádzajúca bodom X pretína k_1 a k_2 po druhýkrát v bodoch C a D . Dokážte, že trojuholníky AYC a BYD sú podobné.

Úloha 8. Cez priesečník výšok H trojuholníka ABC vedieme priamku p . Označme p_a, p_b postupne jej obrazy v osových súmernostiach podľa priamok BC, CA . Dokážte, že sa priamky p_a, p_b pretnú na kružnici opísanej.

Úloha 9 (Simsonova priamka). Nech P je bod na kružnici opísanej trojuholníku ABC . Dokážte, že päty kolmíc z bodu P na strany trojuholníka ležia na jednej priamke.

Úloha 10. Body A, B, C, P ležia na jednej kružnici. Kružnica k sa dotýka priamky PA v bode A a prechádza bodom B . Druhý priesečník tejto kružnice s priamkou AC označme X . Dokážte, že priamka BX je kolmá na Simsonovu priamku trojuholníku ABC vzhľadom k bodu P .

Úloha 11 (IMO shortlist 2010). Je daný ostrouhlý trojuholník ABC . Nech D, E, F sú päty výšok postupne z vrcholov A, B, C . Jeden z priesečníkov EF s kružnicou opísanou označíme P . Priesečník priamok BP a DF označme Q . Dokážte, že $|AP| = |AQ|$.