

Pascalova veta

Jozef Rajník, KMS sústredenie BETA, Juskova Voľa 9. – 16. 2. 2020

Úloha 1. Nech D a F sú postupne stredy oblúkov AB , AC (neobsahujúcich tretí bod) kružnice opísanej trojuholníku ABC . Nech P leží na oblúku BC neobsahujúcom A a nech $Q = DP \cap BA$ a $R = PE \cap AC$. Dokážte, že priamka QR prechádza cez stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC .

Úloha 2. Uvažujme kružnicu opísanú trojuholníku ABC . Nech D je priesečník dotyčnice v bode A s priamkou BC , E je priesečník dotyčnice v bode B s priamkou CA a F je priesečník dotyčnice v bode C s priamkou AB . Dokážte, že body D , E , F ležia na priamke.

Úloha 3 (Newtonova veta). Kružnica vpísaná do štvoruholníka $ABCD$ so stranami AB , BC , CD , DA sa dotýka týchto strán postupne v bodoch E , F , G , H . Dokážte, že priamky AC , EG , BD , BH prechádzajú jedným bodom.

Úloha 4. Nech A , B , C , A' , B' , C' sú body na kružnici, pre ktoré platí $AA' \perp BC$, $BB' \perp CA$ a $CC' \perp AB$. Ďalej nech D je ľubovoľný bod na tej istej kružnici a nech $A'' = DA' \cap BC$, $B'' = DB' \cap CA$ a $C'' = DC' \cap AB$. Dokážte, že body A'' , B'' , C'' a ortocentrum trojuholníka ABC ležia na jednej priamke.

Úloha 5. Nech ABC je ľubovoľný trojuholník a P ľubovoľný bod v jeho vnútri. Nech P_1 , P_2 sú päty kolmíc z bodu P postupne na strany AC a BC . Nech Q_1 a Q_2 sú päty kolmíc z bodu C postupne na priamky AP a BP . Dokážte, že priamky P_1Q_2 , Q_1P_2 a AB prechádzajú jedným bodom.

Úloha 6. Kružnica pretína strany BC , CA a AB trojuholníka ABC postupne v bodoch D_1 , D_2 ; E_1 , E_2 a F_1 , F_2 v tomto poradí. Úsečky D_1E_1 a D_2F_2 sa pretínajú v bode L . Úsečky E_1F_1 a E_2D_2 v bode M . Úsečky F_1D_1 a F_2E_2 v bode N . Dokážte, že priamky AL , BM , CN prechádzajú jedným bodom.

Úloha 7 (KMS-17-Z3-10). V jedálni urobili tety kuchárky langoše. Kuchárka Betka sa oduševnene pustila do kečupomaľby langoša. Najprv do kružnice l , ktorá ohraničuje langoš, vpísala trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole A . Ďalej urobila dotyčnicu ku kružnici l v bode A , ktorá prešla priamku BC v bode P . Stred kratšieho oblúka AB kružnice l označila ako M . Pokračovala priamkou PM , ktorá druhýkrát prešla kružnicu l v bode Q . Svoje umenie zakončila dotyčnicou ku kružnici l v bode Q , ktorá prešla priamku AC v bode K . Síce plno kečupu skončilo mimo taniera, ale Betka vie, že jej umelecké dielo je to pravé. Dokážte, že uhol PKC je pravý.

Literatúra

[1] Kin Y. Li: *Famous Geometry Theorems*, Mathematical Excalibur, 2005, vol 10., no 3.