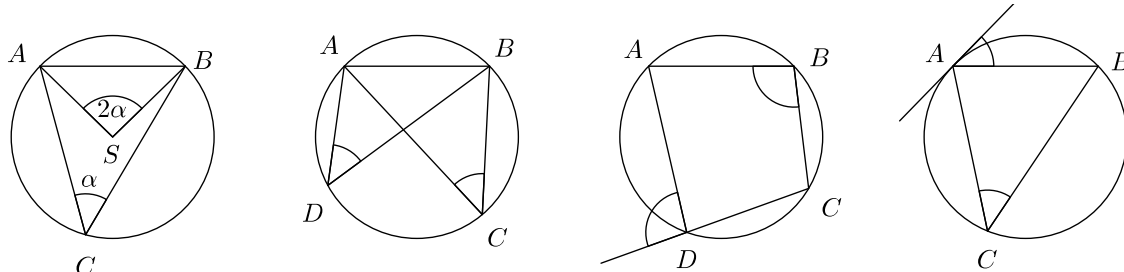


Počítanie uhlov

Jozef Rajník, KMS online prednáška 14. 2. 2021

Podrobnejšie o počítaní uhlov si môžete prečítať na <https://kms.sk/~mazo/matematika/pocitanieUhlov.pdf> a v zbierke KMS.

Pripomeňme si základné nástroje na počítanie ulov v kružniciach.



To, že štyri body A, B, C, D ležia na kružnici (v danom poradí), je ekvivalentné s nasledujúcimi podmienkami.

1. Osi strán AB, BC, CD, DA sa pretínajú v jednom bode (väčšinou sa nevyužíva).
2. $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$ (obvodové uhly).
3. $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = 180^\circ$.

Úloha 1. Máme dané dve kružnice k a l , ktoré sa pretínajú v bodoch X a Y . Bodom X vedieme priamku, ktorá pretne kružnice k a l postupne v bodoch A a C . Podobne vedieme priamku aj bodom Y , ktorá pretne kružnice k a l postupne v bodoch B a D . Dokážte, že $AB \parallel CD$.

Úloha 2. Priesečník výšok H trojuholníka ABC zobrazíme v osovej symetrii podľa priamky BC na bod H' . Dokážte, že bod H' leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC .

Úloha 3. Daný je trojuholník ABC . Dokážte, že os uhla BAC a os strany BC sa pretínajú na kružnici opísanej trojuholníku ABC .

Poznámka. Tento bod sa zvykne v komunite českých a slovenských matematikov nazývať *švrčkov bod* a označuje sa $\check{S}_A$, príp. často len $\check{S}$ (Podľa Jaroslava Švrčka). Pozor tento názov však nie je ustálený, a opravovatelia vašich riešení ho nemusia poznať.

Úloha 4. Dokážte, že v predchádzajúcej úlohe platí $|\check{S}B| = |\check{S}I| = |\check{S}C|$, kde I je stred vpísanej kružnice trojuholníku ABC .

Úloha 5 (KMS 15/16-Z1-6). Jožo sa ocitol v ríši geometrie. Sotva sa poobzeral a už ho napadol svojimi ostrými uhlami ostrouhlý trojuholník ABC . Bod D je v ňom päta výšky na stranu BC . Kružnica so stredom v bode D a polomerom $|AD|$ pretína priamky AB, AC postupne v bodoch P, Q . Aby Jožo premohol trojuholník ABC , musí zaútočiť na jeho podobné trojuholníky. Dokážte, že trojuholníky AQP a ABC sú podobné.

Úloha 6 (KMS 12/13-L2-8). Bod O je stred kružnice opísanej ostrouhlému trojuholníku ABC . Kružnica k opísaná trojuholníku BCO pretína priamky AB, AC postupne v bodoch D, E (rôznych od B, C). Úsečka OG je priemerom kružnice k . Dokážte, že $ADGE$ je rovnobežník.

Úloha 7 (KMS 02/03-L2-8). Dve kružnice k_1 a k_2 sa pretínajú v dvoch bodoch A a B . Na kružnici k_1 sú ďalej dané dva rôzne body C a D tak, že sečnica BC kružnice k_1 vytína na kružnici k_2 ďalší bod E , podobne sečnica BD kružnice k_1 vytína na kružnici k_2 bod F . Dokážte, že ak sú úsečky DF a CE rovnako dlhé, tak bod A je rovnako vzdialený od priamok BC a BF .

Úloha 8. Nech S_a , S_b a S_c sú postupne stredy strán a , b a c trojuholníka ABC a P_a , P_b a P_c sú postupne päty výšok na strany a , b a c . Dokážte, že body S_a , S_b , S_c , P_a , P_b , P_c ležia na jednej kružnici.

Úloha 9. Nech H je ortocentrum trojuholníka ABC a X , Y , Z sú postupne stredy strán AH , BH a CH . Dokážte, že body S_a , S_b , S_c , P_a , P_b , P_c , X , Y a Z ležia na jednej kružnici.

Kružnica, ktorá sa vyskytovala v predchádzajúcich dvoch úlohách sa volá *Feuerbachova kružnica* alebo tiež *kružnica deviatich bodov*.

Úloha 10 (KMS 05/06-Z2-5). Nech CD a BE sú výšky trojuholníka ABC . Dokážte, že trojuholníky ACB a ADE sú podobné.

Úloha 11. V ostrouhlom trojuholníku ABC označme D päť výšky na stranu BC a P , Q , R , S postupne päty kolmíc z bodu D na priamky AB , AC , BH , CH .

a) Dokážte, že body B , C , P , Q ležia na jednej kružnici.

b) Dokážte, že body P , Q , R , S ležia na jednej priamke.

Úloha 12 (KMS 14/15-L2-6). V kosoštvorci $KLMN$ platí $|\sphericalangle KLM| = 40^\circ$. Označme stred strany LM ako S . Päť kolmice na priamku NS prechádzajúcu cez bod K označme X . Zistite veľkosť uhla MXN .

Úloha 13 (KMS 14/15-Z2-8). Diagonály AC a BD tetivového štvoruholníka $ABCD$ sa pretínajú v bode P . Bod O je stred opísanej kružnice ABP a H je priesečník výšok trojuholníka CDP . Odkľajte Veroniku a dokážte, že body H , P a O ležia na jednej priamke.

Úloha 14 (KMS 16/17-Z1-8). Na obraze sa nachádza trojuholník ABC s bodom L na strane AC takým, že BL je os uhla ABC . Nech M je ľubovoľný vnútorný bod úsečky CL . Dotyčnica v bode B ku kružnici opísanej trojuholníku ABC pretína polpriamku CA v bode P . Dotyčnice cez body B a M ku kružnici opísanej trojuholníku BLM sa pretínajú v bode Q . Dokážte, že priamka PQ je rovnobežná s priamkou BL .

Náznaky riešení

5 Keďže uhol APQ nemôže byť β , tak chceme ukázať, že má veľkosť γ . Inými slovami, že body $BCQP$ ležia na kružnici.

Dopočítajte si stredový uhol ADQ . Nezabudnite na konfigurácie.

6 Využite stredový uhol v trojuholníku ABC : $|\sphericalangle BOG| = |\sphericalangle COG| = \alpha$.

Štvoruholníky $BOGD$ a $COGE$ sú zo zadania tetivové. Využite to na prenesenie uhla α cez protiľahlé / obvodové / susedné (poodľa konfigurácie) uhly. Ukážte, že $|\sphericalangle ADG| = |\sphericalangle GEA| = 180^\circ - \alpha$.

7 Máme dve kružnice, preto sa budú dobre rátať uhly. Vidíme nejaké okamžité vzťahy medzi uhlami? (Najlepšie také, čo sa dajú zakresliť do obrázka bez výpočtov, napr. dvojice rovnakých uhlov.) Nezaбудnime: čo máme dokázať?

Zaujímajú nás výšky v trojuholníkoch CEA a DFA . Čo viete o týchto trojuholníkoch povedať?

8 Stačí ukázať, že bod P_a leží na kružnici s bodmi S_a, S_b, S_c . To, že tam ležia body P_b, P_c vyplynie zo symetrie.

Ukážte, že $|\sphericalangle S_b P_a S_c| = |\sphericalangle S_b S_a S_c| = \alpha$.

10 Ako cez uhly popíšeme, že dva trojuholníky sú podobné? Čo presne chceme dokázať? Z bodov D aj E vidíme úsečku BC pod pravým uhlom.

Čo platí pre protiľahlé uhly EDB a ECB v štvoruholníku $BCDE$?

11 $APDQ$ je tetivový štvoruholník, preto $\gamma = |\sphericalangle QDA| = |\sphericalangle APQ|$. Z toho máme a). Navyše $|\sphericalangle QPD| = 90^\circ - \gamma$. Z tetivovosti $BDPR$ zas $|\sphericalangle RPD| = |\sphericalangle RBD| = 90^\circ - \gamma$. Z toho sú P, R, Q na priamke. Zo symetrie aj P, S, Q .

12 Nájdite v zadaní vhodnú kružnicu, jej stred tam už máte. Bude treba si niečo dokresliť.

Ak si priesečník priamky NS s priamkou KL ako P , tak body K, M, P ležia na kružnici (tálesovej) so stredom v bode L . Uhol MXP je obvodový.

13 Keďže $PH \perp CD$, stačí ukázať, že $OP \perp CD$.

Cez obvodové a stredové uhly v dvoch kružniciach, čo tam máte, odvoďte $2|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle BOP|$.