

Rovnoľahlosť

Jozef Rajník, KMS sústredenie BETA, Dobrá Voda, 17. 2. – 24. 2. 2018

Rovnoľahlosť so stredom S a koeficientom k je zobrazenie dané bodom S , tzv. *stredom rovnoľahlosti* a nenulovým reálnym číslom k , *koeficientom rovnoľahlosti*. Označuje sa $H(S, k)$. Pre $k > 0$ každý bod $X \neq S$ roviny zobrazí na bod X' , ktorý leží na polpriamke SX taký, že $|SX'| = k|SX|$. Pre záporné k bod X' leží na polpriamke opačnej SX . Rovnoľahlosť s kladným, resp. záporným k sa nazýva aj *kladná*, resp. *záporná* rovnoľahlosť.

Rovnoľahlosť je príklad *podobného zobrazenia*, t. j. zobrazuje útvary na s nimi podobné. Nemusí teda zachovávať dĺžky strán, zachováva však pomery strán a uhly

Vlastnosti rovnoľahlosti (premýslite si, prečo platia):

1. Každá rovnoľahlosť má práve jeden samodružný bod — bod S (ak $k \neq 1$, vtedy sú všetky body samodružné).
2. Obraz priamky je priamka s ňou rovnobežná.
3. Stred rovnoľahlosti, bod a jeho obraz ležia na jednej priamke.
4. Inverzným zobrazením k rovnoľahlosti $H(S, k)$ je rovnoľahlosť $H(S, 1/k)$.
5. Rovnoľahlosť $H(S, -1)$ je stredová súmernosť so stredom S .
6. Medzi ľubovoľnými dvomi úsečkami existuje práve jedna kladná a práve jedna záporná rovnoľahlosť.
7. Existuje rovnoľahlosť (alebo posunutie) medzi ľubovoľnými dvomi podobnými mnohoúhľníkmi, ktorých odpovedajúce strany sú rovnobežné.

Rovnoľahlosť nám vie dať lepší náhľad do niektorých geometrických úloh. Ak potrebujeme dokázať, že tri body A, B, C ležia na priamke, môžeme nájsť rovnoľahlosť so stredom v bode A , v ktorej sa bod B zobrazí na bod C . Ak je našou úlohou dokázať, že tri priamky AA', BB', CC' sa pretínajú v jednom bode, stačí nám nájsť rovnoľahlosť, v ktorej sa body A, B, C zobrazia postupne na body A', B', C' . Tieto priamky potom budú prechádzať stredom rovnoľahlosti.

Rovnoľahlosť príde vhod pri práci s kružnicami. Ak máme kružnice k, l s rôznymi polomerami, tak existuje práve jedna záporná a práve jedna kladná rovnoľahlosť, ktorá zobrazí kružnicu k na kružnicu l . Stredy týchto rovnoľahlostí vieme nájsť ako priesečníky spoločných vonkajších (pre kladnú rovnoľahlosť) alebo vnútorných (pre zápornú) dotyčníc. Samozrejme, stred zápornej rovnoľahlosti nájdeme takto len vtedy, ak kružnice nemajú spoločný bod, čo znamená, že majú spoločné vnútorné dotyčnice.

Obzvlášť zaujímavý je prípad, keď sa kružnice k a l dotýkajú. Vtedy je stredom zápornej rovnoľahlosti zobrazujúcej k na l bod ich vzájomného dotyku. Táto rovnoľahlosť je zároveň aj užitočný spôsob, ako v úlohe uchopiť dotýkajúce sa kružnice.

Úlohy

Úloha 1. Dokážte, že ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.

Úloha 2. Kružnice k a l sa zvnútra dotýkajú v bode A . Dotyčnica v bode B ku kružnici l pretína kružnicu k v bodoch C a D . Dokážte, že priamka AB prechádza stredom oblúka CD neobsahujúceho bod A .

Úloha 3. Je daný trojuholník ABC s opísanou kružnicou k . Nech l je kružnica, ktorá sa dotýka kružnice k v bode A a priamky BC sa dotýka v bode D . Dokážte, že AD je os uhla BAC .

Úloha 4. Kružnice k, m, s sa dotýkajú priamky t postupne v bodoch K, M, S . Navyše, kružnice k a m sa zvonka dotýkajú v bode A a kružnice m a s sa zvonka dotýkajú v bode B . Dokážte, že priamky KA a SB sa pretínajú na kružnici m .

Úloha 5. Je daná kružnica k a na nej bod A . Určte množinu všetkých stredov úsečiek AB , kde $B \neq A$ je bod kružnice k .

Úloha 6. Dve kružnice s rôznym polomerom sa pretínajú v bodoch X, Y . Ich spoločné vonkajšie dotyčnice sa pretínajú v bode Z , pričom jedna z nich sa dotýka kružnice k, l postupne v bodoch P, Q . Dokážte, že priamka ZX je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku PQX .

Úloha 7. Kružnica k vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka strany BC v bode D . Označme M bod na kružnici k taký, že DM je priemer kružnice k a nech E bod dotyku kružnice pripísanej ku strane BC so stranou BC . Dokážte, že body A , M a E ležia na priamke.

Úloha 8 (60MO–A–II–2). Daný je trojuholník ABC s obsahom S . Vnútri trojuholníka, ktorého vrcholmi sú stredy strán trojuholníka ABC , je ľubovoľne zvolený bod O . Označme A' , B' , C' postupne obrazy bodov A , B , C v stredovej súmernosti podľa bodu O . Dokážte, že šesťuholník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$.

Úloha 9. V trojuholníku ABC pretínajú osi vnútorných uhlov opísanú kružnicu postupne v bodoch $\check{S}_A$, $\check{S}_B$ a $\check{S}_C$. Kružnica vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka strán a , b , c postupne v bodoch K , L , M . Dokážte, že priamky $\check{S}_AK$, $\check{S}_BL$ a $\check{S}_CM$ prechádzajú jedným bodom.

Úloha 10 (PraSe 11/12. 1. seriálová séria, úloha 3). Je daný trojuholník ABC . Označme T_a bod dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ABC so stranou BC a E_a stred kružnice pripísanej k strane BC . Podobne definujeme body T_b , E_b a T_c , E_c pre strany CA a AB . Dokážte, že priamky T_aE_a , T_bE_b a T_cE_c prechádzajú jedným bodom.

Úloha 11. Dané sú dve priamky p , q a bod A . Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka priamok p , q a prechádza bodom A .

Úloha 12. Dané sú dve priamky p , q a kružnica m . Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka priamok p , q a kružnice m .

Úloha 13 (KMS 05/06–2L–6). Kružnice k_1 , k_2 sa zvonka dotýkajú v bode D . Priamka p sa dotýka kružníc k_1 , k_2 po rade v bodoch A , B . Úsečka AC je priemerom kružnice k_1 . Priamka q prechádza cez bod C a dotýka sa kružnice k_2 v bode E . Dokážte, že trojuholník ACE je rovnoramenný.

Úloha 14 (IMO 1981). Tri zhodné kružnice sa pretínajú v jednom spoločnom bode O . Každá kružnica sa dotýka dvoch strán trojuholníka ABC (každá kružnica inej dvojice strán). Dokážte, že bod O , stred vpísanej a opísanej kružnice trojuholníku ABC ležia na jednej priamke.

Úloha 15 (IMO 1978). V trojuholníku ABC s opísanou kružnicou k , platí $|AB| = |AC|$. Kružnica l sa dotýka priamok AB , AC postupne v bodoch P , Q a taktiež sa dotýka kružnice k . Dokážte, že stred úsečky PQ je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC .

Úloha 16 (IMO 1982). Máme nie rovnoramenný trojuholník $A_1A_2A_3$ so stranami a_1 , a_2 , a_3 (a_i je oproti A_i). Pre $i \in \{1, 2, 3\}$ nech M_i je stred strany a_i , T_i bod dotyku kružnice vpísanej trojuholníku $A_1A_2A_3$ so stranou a_i a S_i obraz bodu T_i v osovej súmernosti podľa osi vnútorného uhla pri vrchole A_i . Dokážte, že priamky M_1S_1 , M_2S_2 a M_3S_3 prechádzajú jedným bodom.