

Sínusová veta

Jozef Rajník, 28. 3. 2021

Tvrdenie 1 (Sínusová veta). Nech ABC je trojuholník so štandardným označením strán a uhlov a nech R je polomer jemu opísanej kružnice, potom platí

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Uvedomenie dňa. Pre uhly α, β platí:

- $\sin \alpha = \sin(180 - \alpha)$,
- $\cos \alpha = -\cos(180 - \alpha)$,
- $\cos \alpha = \sin(90 - \alpha) = \sin(90 + \alpha)$,
- ak $\alpha, \beta \in \langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$ a $\sin \alpha = \sin \beta$, tak $\alpha = \beta$ alebo $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Tvrdenie 2 (Kosínusová veta).

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Tvrdenie 3 (o osi uhla). Majme trojuholník ABC a bod D na priamke BC .

- (i) Priamka AD je osou vnútorného uhla BAC práve vtedy, keď D je vnútorným bodom úsečky BC a zároveň platí

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

- (ii) Priamka AD je osou vonkajšieho uhla BAC práve vtedy, keď bod D nie je vnútorným bodom úsečky BC a zároveň platí $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$.

Úloha 1. Je daný trojuholník ABC , stred strany BC označíme M . Nech na strane AB leží bod P . Označme Q priesečník AM a PC . Dokážte, že ak $|AP| = |PQ|$, tak $|CQ| = |AB|$.

Úloha 2. V rovnobežníku $TUVW$ sú na stranách TU a UV postupne body X a Y tak, že $|TX| = |VY| > 0$. Priamky TY a VX sa pretínajú v bode P . Dokážte, že P leží na osi uhla VWT .

Úloha 3 (KMS 15/16-Z2-8). V ostrouhlom trojuholníku ABC je M stred strany BC . Kolmica na úsečku AM prechádzajúca bodom A pretína priamky, na ktorých ležia výšky na strany AB , AC v bodoch E , F . Dokážte, že trojuholník EFM je rovnoramenný.

Úloha 4. Je daný ostrouhlý trojuholník ABC . Nech S je stred strany AB a H jeho ortocentrum. Priamka p je kolmica na SH prechádzajúca bodom H . Jej priesečníky s priamkami AC a BC označme postupne P a Q . Dokážte, že $|HP| = |HQ|$.

Úloha 5. Je daná úsečka AB a kladné reálne číslo λ . Nájdite množinu bodov X v rovine úsečky AB takých, že

$$\frac{|AX|}{|XB|} = \lambda.$$

Náznaky riešení

1. Zapište si sínusové vety pre trojuholníky BMA a MCQ .
2. Sínusovými vetami pre trojuholníky PTX a PVY vyjadrite pomer $|PV|/|PT|$.
Pomocou neho a sínusovíc viet pre trojuholníky PTW a PVW ukážte zhodnosť uhlov.
3. Dokazujte, že $|EA| = |AF|$.
Využite sínusové vety v trojuholníkoch AEC , AFB , BMA a CMA .
4. Vyuhľite si, že $|\sphericalangle HPF| = \sphericalangle SHB$ a $|\sphericalangle HQF| = |\sphericalangle AHS|$.
Následne použite sínusové vety pre trojuholníky AHP , BHQ , ASH , BSH .
5. Je to (pre $\lambda \neq 1$) kružnica nad priemerom PQ , kde P , Q sú dva body priamky AB s danou vlastnosťou.
Bod danej vlastnosti leží na kružnici: na základe pomerov nájdite os vonkajšieho a vnútorného uhla – tie sú na seba kolmé.
Bod z kružnice má danú vlastnosť: Ukážte, že XP je osou uhla AXB . Využite na to sínusové vety pre štyri trojuholníky a získajte z nich tangensy uhlov AXP a PXB .