

Švrčkov bod

Jozef Rajník, KMS víkend 1. 10. 2017

Keď máme trojuholník ABC s opísanou kružnicou k , tak *švrčkovým bodom prislúchajúcim k bodu A* nazývame stred oblúka BC kružnice k , ktorý neobsahuje bod A . Tento materiál obsahuje niekoľko jeho základných vlastností a zopár úloh. Náučné texty spolu s dôkazmi tvrdení a riešeniami niektorých úloh nájdete v seriáli MKS (PraSe) Geometrie trojuholníka (strany 29 až 38, <http://mks.mff.cuni.cz/archive/36/serial.pdf>). Pomenovanie švrčkov bod je neoficiálne a používa sa len v komunite slovenských a českých riešiteľov matematickej olympiády. Preto pri riešení súťaží odporúčame dokázať všetky potrebné vlastnosti švrčkovho bodu. Pri riešení KMS sa môžete odkázať na literatúru, napr. na spomenutý seriál.

Tvrdenie 1. V trojuholníku ABC sa os uhla BAC a os úsečky BC pretínajú vo švrčkovom bode $\check{S}_A$.

Úloha 1 (Matematický náboj 2017m 21). Máme kružnicu k so stredom M a priemerom AB . Body C a D ležia na kružnici k tak, že platí $AC \perp DM$ a $|\angle MAC| = 56^\circ$. Zistite veľkosť ostrého uhla medzi priamkami AC a BD v stupňoch.

Tvrdenie 2. V trojuholníku ABC je I stred kružnice vpísanej a E_A stred kružnice pripísanej k strane BC . Body B, C, I, E_A ležia na kružnici so stredom v bode $\check{S}_A$.

Úloha 2 (IMO 2004). Nech ABC je ostrouhlý trojuholník, v ktorom $|AB| \neq |AC|$. Kružnica nad priemerom BC pretína strany AB a AC postupne v bodoch M a N . Označme ako O stred strany BV . Vnútorne osi uhlov BAC a MON sa pretínajú v bode R . Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom BMR a CNR sa druhýkrát pretínajú na strane BC .

1 Ďalšie úlohy

Úloha 3. Švrčkovým bodom $\check{S}_A$ v trojuholníku ABC vedieme polpriamky p a q , ktoré pretnú stranu BC postupne v bodoch X a Y a kružnicu opísanú trojuholníku ABC pretnú postupne v bodoch Z a W . Dokážte, že body X, Y, Z, W ležia na jednej kružnici.

Úloha 4. Je daný trojuholník ABC s opísanou kružnicou k . Kružnica l sa dotýka zvnútra kružnice k v bode A a strany BC sa dotýka v bode D . Dokážte, že AD je os uhla BAC .

Úloha 5. Kružnice k_1 a k_2 sa dotýkajú zvonka v bode T a obe sa dotýkajú zvnútra kružnice k postupne v bodoch R a S . Nech Q je druhý priesečník priamky RT a kružnice k . Dokážte, že $|\angle QST| = 90^\circ$.

Úloha 6 (KMS 2016/17, 3. letná séria, 9; Seriál cvičenie 7). Š nie je uznávaným čarodejníkom Krajiny osí ôs len tak pre nič za nič. Je majstrom v čarovaní osí. Jeho najsilnejšie kúzlo pozostáva z trojuholníka ABC . Os uhla CAB pretína stranu BC v bode L a os uhla CBA pretína stranu AC v bode K . Os úsečky (teda os osí) BK pretína priamku AL v bode M . Bod N leží na priamke BK tak, že priamky LN a MK sú rovnobežné. Dokážte, že $|LN| = |NA|$.

Úloha 7 (IMO 2006; Seriál príklad 9). Nech ABC je trojuholník so stredom vpísanej kružnice I . Vnútri trojuholníka ABC leží bod P , pre ktorý platí

$$|\angle PBA| + |\angle PCA| = |\angle PBC| + |\angle PCB|.$$

Ukážte, že platí $|AP| \geq |AI|$, pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $P = I$.

Úloha 8 (IMO 2002; Seriál cvičenie 10). Nech BC je priemer kružnice ω so stredom v bode O . Nech A je bod na kružnici ω taký, že $|\angle AOB| < 120^\circ$. Nech D je stred oblúka AB kružnice ω , ktorý neobsahuje bod C . Ďalej priamka vedená cez bod O rovnobežná so stranou DA pretína priamku AC v bode I a os úsečky OA pretína kružnicu ω v bodoch E a F . Dokážte, že I je stred vpísanej kružnice trojuholníku DEF .

Úloha 9 (Japonská veta; Seriál cvičenie 11). Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník. Dokážte, že stredy kružníc vpísaných trojuholníkmi ABC, BCD, CDA a DAB tvoria pravouholník (obdĺžnik alebo štvorec).