

Symediány

Giuseppe Paradiso, 12. 2. 2019

Úloha 1. Dokážte, že priamky AH a AO sú osovo súmerné podľa osi uhla BAC .

Priamky, ktoré sú v trojuholníku ABC osovo súmerné podľa osi uhla BAC , sa nazývajú *izogonálne* vzhľadom k uhlu BAC . Ako sme videli, príkladom takýchto priamok sú AH a AO .

Úloha 2. Bodom A trojuholníka ABC prechádzajú priamky p, q , ktoré pretínajú podruhékrát kružnicu opísanú trojuholníku ABC postupne v bodoch P, Q . Dokážte, že priamky p, q sú izogonálne vzhľadom k uhlu BAC práve vtedy, keď body P, Q sú osovo symetrické podľa osi úsečky BC .

Úloha 3. Nech priamky l, m sú izogonálne vzhľadom k uhlu BAC v trojuholníku ABC . Nech P_b, P_c sú postupne kolmé priemety bodu $P \in l$ na priamky AC, AB . Dokážte, že $P_b P_c \perp m$.

Úloha 4. Na strane BC trojuholníka ABC ležia body D_1 a D_2 tak, že AD_1 a AD_2 sú izogonály. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkmi ABC a $AD_1 D_2$ sa dotýkajú.

Z význačných prechádzajúcich bodom A nám ostáva ťažnica. Priamka, ktorá je s ňou izogonálna, sa nazýva *symediána*.

Úloha 5. Dotyčnice ku kružnici opísanej trojuholníku ABC v bodoch B, C sa pretínajú v bode X . Dokážte, že AX je symediána.

Úloha 6. Uvažujme konfiguráciu s predchádzajúcej úlohy. Navyše, nech K, J sú postupne priesečníky AX s kružnicou opísanou ABC a úsečkou BC ; M je stred AB . Dokážte, že:

- (1) $\triangle ABK \sim \triangle AMC$,
- (2) Tálesova kružnica nad priemerom AO a kružnica opísaná BOC sa pretínajú v strede úsečky AK ,
- (3) BC je symediána v trojuholníkoch BAK a CAK .
- (4) BC je os uhla AMK ,
- (5) dotyčnice ku kružnici opísanej ABC v bodoch A a K sa pretínajú na priamke BC .

Úloha 7. Nech N je priesečník symediány z bodu A trojuholníka ABC so stranou BC . Dokážte, že

$$\frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}.$$

Úloha 8 (Poľsko 2000). Nech ABC je trojuholník s $|AC| = |BC|$ a P je taký bod vnútri neho, pre ktorý platí $|\angle PAB| = |\angle PBC|$. Ak M je stred strany AB , ukážte, že $|\angle APM| + |\angle BPC| = 180^\circ$.

Úloha 9 (IMO Shortlist 2003 G2). Tri rôzne body fixné A, B, C ležia na priamke v tomto poradí. Nech k je kružnica prechádzajúca bodmi A a C , ktorej stred neleží na priamke AC . Označme P ako priesečník dotyčníc ku kružnici k v bodoch A, C . Nech kružnica k pretína úsečku PB v bode Q . Dokážte, že priesečník osi uhla AQC a priamky AC nezávisí od voľby kružnice k .

Úloha 10 (Vietnamské výberko 2001). V rovine sú dané dve kružnice, ktoré sa pretínajú v bodoch A, B a ich spoločná dotyčnica sa ich dotýka v bodoch P, Q . Nech dotyčnice ku kružnici opísanej trojuholníku APQ v bodoch P, Q sa pretínajú v bode S . Nech H je obraz bodu B v osovej súmernosti podľa priamky PQ . Dokážte, že body A, S, H ležia na jednej priamke.

Úloha 11 (Výberko USA 2007). Trojuholník ABC je vpísaný do kružnice k . Dotyčnice ku kružnici k v bodoch B, C sa pretínajú v bode T . Označme S taký bod na polpriamke BC , pre ktorý $AS \perp AT$. Body B_1, C_1 ležia na polpriamke ST (s tým, že C_1 je medzi B_1 a S) tak, že $|B_1 T| = |BT| = |C_1 T|$. Dokážte, že trojuholníky ABC a $AB_1 C_1$ sú si podobné.

Úloha 12 (USA 2008). Nech ABC je ostrouhlý rôznostranný trojuholník a nech M, N a P sú postupne stredy strán BC, CA a AB . Nech osi strán AB a AC pretínajú polpriamku AM postupne v bodoch D a E a nech priamky BD a CE sa pretínajú v bode F , ktorý je vnútri trojuholníka ABC . Dokážte, že body A, N, F a P ležia na kružnici.

Literatúra

- [1] Navneel Singhal: *Isogonal Conjugates*, <https://pregatirematematicaolimpiadejuniori.files.wordpress.com/2016/07/isogonal-conjugates-1.pdf>
- [2] Yufei Zhao: *Lemmas in Euclidean Geometry*, <http://yufeizhao.com/olympiad/geolemmas.pdf>