

# Vpísané a pripísané kružnice

Josef Rajník, Zimné sústreďenie KMS BETA, 9. – 12. 2. 2022, Kysak

## 1 Základy

**Lema 1.1.** Veľkosti uhlov okolo  $I$  sú:  $|\angle BIC| = 90^\circ + \alpha/2$ ,  $|\angle CIA| = 90^\circ + \beta/2$ ,  $|\angle AIB| = 90^\circ + \gamma/2$ .

**Lema 1.2.** Nech  $K$ ,  $L$ ,  $M$  sú postupne body dotyku kružnice vpísanej trojuholníku  $ABC$  so stranami  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . Potom

$$|AL| = |AM| = \frac{b+c-a}{2}, \quad |BM| = |BK| = \frac{c+a-b}{2}, \quad |CK| = |CL| = \frac{a+b-c}{2}.$$

*Dôkaz.* Dotyčnice ku kružnici z rovnakého bodu majú rovnakú dĺžku (zhodné trojuholníky). Máme tri neznáme dĺžky, tri známe strany, sústava troch rovníc.  $\square$

**Lema 1.3.** Nech  $K$ ,  $L$ ,  $M$  sú postupne body dotyku kružnice pripísanej k strane  $BC$  trojuholníka  $ABC$  s priamkami  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . Potom

$$|AL| = |AM| = \frac{a+b+c}{2}, \quad |BM| = |BK| = \frac{a+b-c}{2}, \quad |CK| = |CL| = \frac{a+c-b}{2}.$$

## 2 Priemer vpísanej kružnice

**Lema 2.1.** Nech  $D$  a  $E$  sú postupne body dotyku kružnice vpísanej a kružnice pripísanej k strane  $BC$  trojuholníku  $ABC$ . Nech  $DF$  je priemer vpísanej kružnice. Potom

- (i)  $|BD| = |EC|$ ,
- (ii) body  $A$ ,  $F$ ,  $E$  ležia na jednej priamke.

*Dôkaz.* 1. vyplýva z predchádzajúcich liem. V 2. uvažujme rovnoláhosť so stredom v  $A$ , ktorá zobrazuje vpísanú kružnicu na pripísanú. V nej sa bod  $F$  zobrazí na  $E$ .  $\square$

## 3 Švrčkov a antišvrčkov bod

V trojuholníku  $ABC$  *švrčkovým bodom prislúchajúcim k bodu  $A$*  nazývame stred oblúka  $BC$  kružnice  $k$ , ktorý neobsahuje bod  $A$ , označujeme ho  $\check{S}_A$ , skrátene  $\check{S}$ . *Antišvrčkovým bodom prislúchajúcim k bodu  $A$*  označujeme stred oblúka  $BC$  obsahujúceho bod  $A$ , označujeme ho  $\check{N}_A$ , skrátene  $\check{N}$ .

**Lema 3.1.** Os uhla  $BAC$  a os úsečky  $BC$  pretínajú vo švrčkovom bode  $\check{S}_A$ .

**Lema 3.2.** Os vonkajšieho uhla  $BAC$  a os úsečky  $BC$  pretínajú v antišvrčkovom bode  $\check{N}_A$ .

**Lema 3.3.** Body  $B$ ,  $C$ ,  $I$ ,  $I_A$  ležia na kružnici so stredom  $\check{S}_A$ .

**Lema 3.4.** Body  $B$ ,  $C$ ,  $I_B$ ,  $I_C$  ležia na kružnici so stredom  $\check{N}_A$ .

**Lema 3.5.**  $I$  je ortocentrum trojuholníka  $I_AI_BI_C$  a kružnica opísaná trojuholníku  $ABC$  je Feuerbachovou kružnicou trojuholníka  $I_AI_BI_C$ .

**Úloha 1.** Uvažujme všetky trojuholníky s pevnou opísanou a vpísanou kružnicou. Dokážte, že trojuholníky z ich antišvrčkov majú pevné ťažisko.

## 4 Priamky pretínajúce sa v jednom bode

**Lema 4.1.** Nech sa kružnica vpísaná trojuholníku  $ABC$  dotýka strán  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  postupne v bodoch  $D$ ,  $E$ ,  $F$  a nech  $M$  je stred strany  $BC$ . Potom priamky  $EF$ ,  $DI$  a  $AM$  prechádzajú jedným bodom.

## 5 I a kružnica dotýkajúca sa dvoch strán a opísanej kružnice

**Úloha 2** (IMO 1978). V trojuholníku  $ABC$  s opísanou kružnicou  $k$ , platí  $|AB| = |AC|$ . Kružnica  $l$  sa dotýka priamok  $AB$ ,  $AC$  postupne v bodoch  $P$ ,  $Q$  a taktiež sa dotýka kružnice  $k$ . Dokážte, že stred úsečky  $PQ$  je stred kružnice vpísanej trojuholníku  $ABC$ .

Táto úloha obsahuje celkom peknú konfiguráciu bodov. O čo je krajšie, že trojuholník  $ABC$  v zadaní vôbec nemusí byť rovnoramenný. Dokonca, stále sa dá potom tvrdenie posunúť ďalej.

**Lema 5.1.** Nech kružnica  $l$  sa dotýka zvnútra kružnice opísanej trojuholníku  $ABC$  a taktiež jeho strán  $AB$ ,  $AC$  postupne v bodoch  $P$ ,  $Q$ . Potom  $I$  je stred úsečky  $PQ$ .

*Dôkaz.* Nech opísaná kružnica (označme ju  $k$ ) a  $l$  sa dotýkajú v  $T$ . Uvažujme rovnoláhosť so stredom v  $T$ , ktorá zobrazuje  $l$  na  $k$ . V nej sa body  $P$ ,  $Q$  zobrazia postupne na  $\check{S}_C$ ,  $\check{S}_B$ . Z vety o pascalovom šesťuholníku  $BAC\check{S}_CT\check{S}_B$  dostávame, že  $P$ ,  $Q$ ,  $I$  ležia na priamke. To, že je  $I$  v strede, je už zjavné.  $\square$

## 6 Úlohy na precvičenie

**Úloha 3** (IMO Shortlist 2005). V trojuholníku  $ABC$ , v ktorom platí  $|AB| + |BC| = 3|AC|$  sa vpísaná kružnica so stredom v bode  $I$  dotýka strán  $AB$  a  $BC$  postupne v bodoch  $D$ ,  $E$ . Nech  $K$ ,  $L$  sú postupne obrazy bodov  $D$ ,  $E$  v stredovej súmernosti so stredom  $I$ . Dokážte, že štvoruholník  $ACKL$  je tetivový.

**Úloha 4** (64MO-A-I-5). V danom trojuholníku  $ABC$  označme  $D$  bod dotyku kružnice vpísanej so stranou  $BC$ . Kružnica vpísaná trojuholníku  $ABD$  sa dotýka strán  $AB$  a  $BD$  v bodoch  $K$  a  $L$ . Kružnica vpísaná trojuholníku  $ADC$  sa dotýka strán  $DC$  a  $AC$  v bodoch  $M$  a  $N$ . Dokážte, že body  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  ležia na jednej kružnici.

**Úloha 5** (IMO 1992). V rovine je daná kružnica  $k$ , priamka  $p$ , ktorá sa jej dotýka, a bod  $M$  ležiaci na priamke  $p$ . Nájdite množinu všetkých bodov  $A$  takých, pre ktoré existujú body  $B$ ,  $C$  ležiace na priamke  $p$  také, že  $M$  je stredom úsečky  $BC$  a  $k$  je kružnica vpísaná trojuholníku  $ABC$ .

**Úloha 6** (Čína 1999). V trojuholníku  $ABC$ ,  $|AB| \neq |AC|$ , nech  $S$  je stred strany  $BC$  a nech  $E$  je bod na ťažnici  $AS$ . Nech  $F$  je päta kolmice z bodu  $F$  na stranu  $BC$  a nech  $P$  je bod na úsečke  $EF$ . Označme  $M$ ,  $N$  päty kolmíc z bodu  $P$  postupne na strany  $AB$  a  $AC$ . Dokážte, že body  $M$ ,  $E$ ,  $N$  ležia na priamke práve vtedy, keď  $P$  leží na osi uhla  $BAC$ .

**Úloha 7** (Matematický náboj 2017m 21). Máme kružnicu  $k$  so stredom  $M$  a priemerom  $AB$ . Body  $C$  a  $D$  ležia na kružnici  $k$  tak, že platí  $AC \perp DM$  a  $|\angle MAC| = 56^\circ$ . Zistite veľkosť ostrého uhla medzi priamkami  $AC$  a  $BD$  v stupňoch.

**Úloha 8.** Švrčkovým bodom  $\check{S}_A$  v trojuholníku  $ABC$  vedieme polpriamky  $p$  a  $q$ , ktoré pretnú stranu  $BC$  postupne v bodoch  $X$  a  $Y$  a kružnicu opísanú trojuholníku  $ABC$  pretnú postupne v bodoch  $Z$  a  $W$ . Dokážte, že body  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $W$  ležia na jednej kružnici.

**Úloha 9.** Je daný trojuholník  $ABC$  s opísanou kružnicou  $k$ . Kružnica  $l$  sa dotýka zvnútra kružnice  $k$  v bode  $A$  a strany  $BC$  sa dotýka v bode  $D$ . Dokážte, že  $AD$  je os uhla  $BAC$ .

**Úloha 10.** Kružnice  $k_1$  a  $k_2$  sa dotýkajú zvonka v bode  $T$  a obe sa dotýkajú zvnútra kružnice  $k$  postupne v bodoch  $R$  a  $S$ . Nech  $Q$  je druhý priesečník priamky  $RT$  a kružnice  $k$ . Dokážte, že  $|\angle QST| = 90^\circ$ .

**Úloha 11** (USAMO 1999). Nech  $ABCD$  je rovnoramenný lichobežník s  $AB \parallel CD$ . Kružnica vpísaná trojuholníku  $BCD$  sa dotýka strany  $CD$  v bode  $F$ . Nech  $F$  je bod na osi (vnútorného) uhla  $DAC$  taký, že  $EF \perp CD$ . Nech kružnica opísaná trojuholníku  $ACF$  pretína priamku  $CD$  v bodoch  $C$  a  $G$ . Dokážte, že trojuholník  $AFG$  je rovnoramenný.

**Úloha 12** (KMS 2016/17, 3. letná séria, 9). Š nie je uznávaným čarodejníkom Krajiny osí ôs len tak pre nič za nič. Je majstrom v čarovaní osí. Jeho najsilnejšie kúzlo pozostáva z trojuholníka  $ABC$ . Os uhla  $CAB$  pretína stranu  $BC$  v bode  $L$  a os uhla  $CBA$  pretína stranu  $AC$  v bode  $K$ . Os úsečky (teda os osí)  $BK$  pretína priamku  $AL$  v bode  $M$ . Bod  $N$  leží na priamke  $BK$  tak, že priamky  $LN$  a  $MK$  sú rovnobežné. Dokážte, že  $|LN| = |NA|$ .

**Úloha 13** (IMO 2006). Nech  $ABC$  je trojuholník so stredom vpísanej kružnice  $I$ . Vnútri trojuholníka  $ABC$  leží bod  $P$ , pre ktorý platí

$$|\angle PBA| + |\angle PCA| = |\angle PBC| + |\angle PCB|.$$

Ukážte, že platí  $|AP| \geq |AI|$ , pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď  $P = I$ .

**Úloha 14** (IMO 2002). Nech  $BC$  je priemer kružnice  $\omega$  so stredom v bode  $O$ . Nech  $A$  je bod na kružnici  $\omega$  taký, že  $|\angle AOB| < 120^\circ$ . Nech  $D$  je stred oblúka  $AB$  kružnice  $\omega$ , ktorý neobsahuje bod  $C$ . Ďalej priamka vedená cez bod  $O$  rovnobežná so stranou  $DA$  pretína priamku  $AC$  v bode  $I$  a os úsečky  $OA$  pretína kružnicu  $\omega$  v bodoch  $E$  a  $F$ . Dokážte, že  $I$  je stred vpísanej kružnice trojuholníku  $DEF$ .

**Úloha 15** (IMO 2004). Nech  $ABC$  je ostrouhlý trojuholník, v ktorom  $|AB| \neq |AC|$ . Kružnica nad priemerom  $BC$  pretína strany  $AB$  a  $AC$  postupne v bodoch  $M$  a  $N$ . Označme ako  $O$  stred strany  $BC$ . Vnútorné osi uhlov  $BAC$  a  $MON$  sa pretínajú v bode  $R$ . Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkmi  $BMR$  a  $CNR$  sa druhýkrát pretínajú na strane  $BC$ .

**Úloha 16** (IMO Shortlist 2005). Ťažnica  $AM$  trojuholníka  $ABC$  pretína jeho vpísanú kružnicu  $k$  v bodoch  $K$  a  $L$ . Priamky cez body  $K$  a  $L$  rovnobežné so stranou  $BC$  pretínajú kružnicu  $k$  po druhýkrát v bodoch  $X$  a  $Y$ . Priamky  $AX$  a  $AY$  pretínajú stranu  $BC$  postupne v bodoch  $P$  a  $Q$ . Dokážte, že  $|BP| = |CQ|$ .

**Úloha 17** (MO 62-A-III). V rovnobežníku  $ABCD$  so stredom  $S$  označme  $I$  stred kružnice vpísanej trojuholníku  $ABD$  a  $T$  bod jej dotyku s uhlopriečkou  $BD$ . Dokážte, že priamky  $IS$  a  $CT$  sú rovnobežné.

**Úloha 18** (63MO-A-I-3). Označme  $I$  stred kružnice vpísanej do daného trojuholníka  $ABC$ . Predpokladajme, že kolmica na priamku  $CI$  vedená bodom  $I$  pretína priamku  $AB$  v bode  $M$ . Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku  $ABC$  pretína úsečku  $CM$  v jej vnútornom bode  $N$  a že priamky  $NI$  a  $MC$  sú na seba kolmé.

**Úloha 19** (iKS 12/13-G5). Nech  $ABC$  je trojuholník s opísanou kružnicou  $k$  a nech  $P$  je ľubovoľný bod na oblúku  $BC$  kružnice  $k$ , ktorý neobsahuje bod  $A$ . Označme  $I, J$  postupne stredy kružníc vpísaných trojuholníkom  $PAB, PAC$ . Dokážte, že ako hýbeme s bodom  $P$ , tak

- a) všetky kružnice s priemerom  $IJ$  prechádzajú spoločným bodom;
- b) všetky stredy úsečiek  $IJ$  ležia na jednej kružnici;
- c) všetky kružnice opísané trojuholníkom  $PIJ$  majú spoločný bod.

## Literatúra

- [1] Yufei Zhao: *Lemmas in Euclidean Geometry*, <http://yufeizhao.com/olympiad/geolemmas.pdf>