

Vpísané a pripísané kružnice

Jozef Rajník, Prípravné sústredenie na IMO a MEMO, 9. – 14. 6. 2024, Modra

Tento materiál je o vpísanej kružnici a vecí okolo nej, teda osi uhly, pripísané kružnice, ale aj mnohé iné veci, ktoré sa objavujú v príbuzných konfiguráciách.

1 Prehľad základných tvrdení

Počítanie uhlov a dĺžok

Konfigurácie s osami uhlov, vpísanou či pripísanými kružnicami a podobnými sú veľmi priaznivé na počítanie uhlov, príp. niekedy aj dĺžok strán.

Tvrdenie 1. Veľkosti uhlov okolo I sú:

$$|\angle BIC| = 90^\circ + \alpha/2, \quad |\angle CIA| = 90^\circ + \beta/2, \quad |\angle AIB| = 90^\circ + \gamma/2.$$

Tvrdenie 2. Nech K, L, M sú postupne body dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ABC so stranami BC, CA, AB . Potom

$$|AL| = |AM| = \frac{b+c-a}{2}, \quad |BM| = |BK| = \frac{c+a-b}{2}, \quad |CK| = |CL| = \frac{a+b-c}{2}.$$

Dôkaz. Dotýčnice ku kružnici z rovnakého bodu majú rovnakú dĺžku (zhodné trojuholníky). Máme tri neznáme dĺžky, tri známe strany, sústava troch rovníc. $\square$

Tvrdenie 3. Nech K, L, M sú postupne body dotyku kružnice pripísanej k strane BC trojuholníka ABC s priamkami BC, CA, AB . Potom

$$|AL| = |AM| = \frac{a+b+c}{2}, \quad |BM| = |BK| = \frac{a+b-c}{2}, \quad |CK| = |CL| = \frac{a+c-b}{2}.$$

Priemer vpísanej kružnice

Tvrdenie 4. Nech D a E sú postupne body dotyku kružnice vpísanej a kružnice pripísanej k strane BC trojuholníku ABC . Nech DF je priemer vpísanej kružnice. Potom

(i) $|BD| = |EC|$,

(ii) body A, F, E ležia na jednej priamke.

Dôkaz. 1. vyplýva z predchádzajúcich lemm. V 2. uvažujme rovnoláhosť so stredom v A , ktorá zobrazuje vpísanú kružnicu na pripísanú. V nej sa bod F zobrazí na E . $\square$

Švrčkov a antišvrčkov bod

V trojuholníku ABC švrčkovým bodom prislúchajúcim k bodu A nazývame stred oblúka BC kružnice k , ktorý neobsahuje bod A , označujeme ho $\check{S}_A$, skrátené $\check{S}$. Antišvrčkovým bodom prislúchajúcim k bodu A označujeme stred oblúka BC obsahujúceho bod A , označujeme ho $\check{N}_A$, skrátené $\check{N}$.

Tvrdenie 5. Os uhla BAC a os úsečky BC pretínajú vo švrčkovom bode $\check{S}_A$.

Tvrdenie 6. Os vonkajšieho uhla BAC a os úsečky BC pretínajú v antišvrčkovom bode $\check{N}_A$.

Tvrdenie 7. Body B, C, I, I_A ležia na kružnici so stredom $\check{S}_A$.

Tvrdenie 8. Body B, C, I_B, I_C ležia na kružnici so stredom $\check{N}_A$.

Tvrdenie 9. I je ortocentrum trojuholníka $I_AI_BI_C$ a kružnica opísaná trojuholníku ABC je Feuerbachovou kružnicou trojuholníka $I_AI_BI_C$.

Tvrdenie 10. Švrčkovým bodom $\check{S}_A$ v trojuholníku ABC vedieme polpriamky p a q , ktoré pretnú stranu BC postupne v bodoch X a Y a kružnicu opísanú trojuholníku ABC pretnú postupne v bodoch Z a W . Potom body X, Y, Z, W ležia na jednej kružnici.

Tvrdenie 11 (Japonská veta). Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník. Potom stredy kružníc vpísaných trojuholníkom ABC , BCD , CDA , DAB tvoria pravouholník.

Úloha 1. V trojuholníku ABC s opísanou kružnicou k sa kružnica l dotýka znútra kružnice k v bode A a strany BC sa dotýka v bode D . Potom AD je os uhla BAC .

Niekoľko exotických liem

Nasledovná úloha obsahuje celkom peknú konfiguráciu bodov.

Úloha 2 (IMO 1978). V trojuholníku ABC s opísanou kružnicou k , platí $|AB| = |AC|$. Kružnica l sa dotýka priamok AB , AC postupne v bodoch P , Q a taktiež sa dotýka kružnice k . Dokážte, že stred úsečky PQ je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC .

Zaujímavé je, že trojuholník ABC v zadaní vôbec nemusí byť rovnoramenný. Dokonca, stále sa dá potom tvrdenie posunúť ďalej.

Tvrdenie 12. Nech kružnica l sa dotýka znútra kružnice opísanej trojuholníku ABC a taktiež jeho strán AB , AC postupne v bodoch P , Q . Potom I je stred úsečky PQ .

Dôkaz. Nech opísaná kružnica (označme ju k) a l sa dotýkajú v T . Uvažujme rovnoláhosť so stredom v T , ktorá zobrazuje l na k . V nej sa body P , Q zobrazia postupne na $\check{S}_C$, $\check{S}_B$. Z vety o pascalovom šesťuholníku $BAC\check{S}_C T \check{S}_B$ dostávame, že P , Q , I ležia na priamke. To, že je I v strede, je už zjavné. $\square$

Tvrdenie 13. Nech sa kružnica vpísaná trojuholníku ABC dotýka strán BC , CA , AB postupne v bodoch D , E , F a nech M je stred strany BC . Potom priamky EF , DI a AM prechádzajú jedným bodom.

2 Úlohy na precvičenie

Úloha 3 (Matematický náboj 2017 21). Máme kružnicu k so stredom M a priemerom AB . Body C a D ležia na kružnici k tak, že platí $AC \perp DM$ a $|\angle MAC| = 56^\circ$. Zistite veľkosť ostrého uhla medzi priamkami AC a BD v stupňoch.

Úloha 4 (Balkan Math olympiad 2024, problem 1). Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s $|AC| > |AB|$ a nech D je priesečník osi uhla z vrcholu A so stranou BC . Obrazy priamok AB a AC v osovej symetrii podľa priamky BC pretínajú priamky AC a AB postupne v bodoch E a F . Bodom D vedieme priamku, ktorá pretne priamky AC a AB postupne v bodoch G a H tak, že bod G je vnútorným bodom úsečky AC a bod H je vnútorným bodom úsečky BF . Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom EDG a FDH sa navzájom dotýkajú.

Úloha 5 (64MO-A-I-5). V danom trojuholníku ABC označme D bod dotyku kružnice vpísanej so stranou BC . Kružnica vpísaná trojuholníku ABD sa dotýka strán AB a BD v bodoch K a L . Kružnica vpísaná trojuholníku ADC sa dotýka strán DC a AC v bodoch M a N . Dokážte, že body K, L, M, N ležia na jednej kružnici.

Úloha 6 (IMO Shortlist 2005). V trojuholníku ABC , v ktorom platí $|AB| + |BC| = 3|AC|$ sa vpísaná kružnica so stredom v bode I dotýka strán AB a BC postupne v bodoch D, E . Nech K, L sú postupne obrazy bodov D, E v stredovej súmernosti so stredom I . Dokážte, že štvoruholník $ACKL$ je tetivový.

Úloha 7 (IMO 2006). Nech ABC je trojuholník so stredom vpísanej kružnice I . Vnútri trojuholníka ABC leží bod P , pre ktorý platí

$$|\angle PBA| + |\angle PCA| = |\angle PBC| + |\angle PCB|.$$

Ukážte, že platí $|AP| \geq |AI|$, pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $P = I$.

Úloha 8 (MO68-A-I-5). Zostrojte trojuholník ABC , ak poznáte jeho obvod o , polomer ρ kružnice pripísanej ku strane B a veľkosť výšky v na túto stranu. Uveďte diskusiu v závislosti od daných dĺžok.

Úloha 9 (IMO 1992). V rovine je daná kružnica k , priamka p , ktorá sa jej dotýka, a bod M ležiaci na priamke p . Nájdite množinu všetkých bodov A takých, pre ktoré existujú body B, C ležiace na priamke p také, že M je stredom úsečky BC a k je kružnica vpísaná trojuholníku ABC .

Úloha 10. Kružnice k_1 a k_2 sa dotýkajú zvonka v bode T a obe sa dotýkajú zvnútra kružnice k postupne v bodoch R a S . Nech Q je druhý priesečník priamky RT a kružnice k . Dokážte, že $|\angle QST| = 90^\circ$.

Úloha 11 (Junior Balkan 2010, KMS 16/17-L3-9). Nech ABC je rôznostranný trojuholník. Os uhla CAB pretína stranu BC v bode L a os uhla CBA pretína stranu AC v bode K . Os úsečky (teda os osi) BK pretína priamku AL v bode M . Bod N leží na priamke BK tak, že priamky LN a MK sú rovnobežné. Dokážte, že $|LN| = |NA|$.

Úloha 12. Uvažujme všetky trojuholníky s pevnou opísanou a vpísanou kružnicou. Dokážte, že trojuholníky z ich antišvrčkov majú pevné ťažisko.

Úloha 13 (USAMO 1999). Nech $ABCD$ je rovnoramenný lichobežník s $AB \parallel CD$. Kružnica vpísaná trojuholníku BCD sa dotýka strany CD v bode F . Nech F je bod na osi (vnútorného) uhla DAC taký, že $EF \perp CD$. Nech kružnica opísaná trojuholníku ACF pretína priamku CD v bodoch C a G . Dokážte, že trojuholník AFG je rovnoramenný.

Úloha 14 (IMO 2002). Nech BC je priemer kružnice ω so stredom v bode O . Nech A je bod na kružnici ω taký, že $|\angle AOB| < 120^\circ$. Nech D je stred oblúka AB kružnice ω , ktorý neobsahuje bod C . Ďalej priamka vedená cez bod O rovnobežná so stranou DA pretína priamku AC v bode I a os úsečky OA pretína kružnicu ω v bodoch E a F . Dokážte, že I je stred vpísanej kružnice trojuholníku DEF .

Úloha 15 (IMO 2004). Nech ABC je ostrouhlý trojuholník, v ktorom $|AB| \neq |AC|$. Kružnica nad priemerom BC pretína strany AB a AC postupne v bodoch M a N . Označme ako O stred strany BC . Vnútorné osi uhlov BAC a MON sa pretínajú v bode R . Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkmi BMR a CNR sa druhýkrát pretínajú na strane BC .

Úloha 16 (IMO Shortlist 2005). Ťažnica AM trojuholníka ABC pretína jeho vpísanú kružnicu k v bodoch K a L . Priamky cez body K a L rovnobežné so stranou BC pretínajú kružnicu k po druhýkrát v bodoch X a Y . Priamky AX a AY pretínajú stranu BC postupne v bodoch P a Q . Dokážte, že $|BP| = |CQ|$.

Úloha 17 (62MO-A-III). V rovnobežníku $ABCD$ so stredom S označme I stred kružnice vpísanej trojuholníku ABD a T bod jej dotyku s uhlopriečkou BD . Dokážte, že priamky IS a CT sú rovnobežné.

Úloha 18 (63MO-A-I-3). Označme I stred kružnice vpísanej do daného trojuholníka ABC . Predpokladajme, že kolmica na priamku CI vedená bodom I pretína priamku AB v bode M . Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku ABC pretína úsečku CM v jej vnútornom bode N a že priamky NI a MC sú na seba kolmé.

Úloha 19 (67MO-A-III-3). Daný je trojuholník ABC . Os uhla pri vrchole A pretína stranu BC v bode D . Označme E, F stredy kružníc opísaných trojuholníkmi ABD, ACD . Akú veľkosť môže mať uhol BAC , ak stred kružnice opísanej trojuholníku AEF leží na priamke BC ?

Úloha 20 (Čína 1999). V trojuholníku ABC , $|AB| \neq |AC|$, nech S je stred strany BC a nech E je bod na ťažnici AS . Nech F je päta kolmice z bodu F na stranu BC a nech P je bod na úsečke EF . Označme M, N päty kolmíc z bodu P postupne na strany AB a AC . Dokážte, že body M, E, N ležia na priamke práve vtedy, keď P leží na osi uhla BAC .

Úloha 21 (iKS 12/13-G5). Nech ABC je trojuholník s opísanou kružnicou k a nech P je ľubovoľný bod na oblúku BC kružnice k , ktorý neobsahuje bod A . Označme I, J postupne stredy kružníc vpísaných trojuholníkmi PAB, PAC . Dokážte, že ako hýbeme s bodom P , tak

- a) všetky kružnice s priemerom IJ prechádzajú spoločným bodom;
- b) všetky stredy úsečiek IJ ležia na jednej kružnici;
- c) všetky kružnice opísané trojuholníkom PIJ majú spoločný bod.

Úloha 22 (KMS 21/22-Z3-10). Je daný trojuholník ABC , v ktorom $|AB| \neq |AC|$. Stred jeho vpísanej kružnice označme I . Nech D je stred strany BC . Dotyčnica z bodu D ku vpísanej kružnici (rôzna od strany BC) sa jej dotýka v bode E . Dokážte, že DI je rovnobežné s AE .

Úloha 23 (Izrael TST 2024). V trojuholníku ABC označíme I stred kružnice vpísanej, I_A stred kružnice pripísanej k strane BC a D bod jej dotyku so stranou BC . Stred oblúka BAC označíme N . Priamka NI pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC podruhékrát v bode T . Stred kružnice opísanej trojuholníku AID označíme K . Dokážte, že priamky TI_A a KI sú na seba kolmé.

Úloha 24 (Iran TST 2024). For a right angled triangle $\triangle ABC$ with $\angle A = 90$ we have $AC = 2AB$. Point M is the midpoint of side BC and I is incenter of triangle $\triangle ABC$. The line passing through M and perpendicular to BI intersect with lines BI and AC at points H and K respectively. If the semi-line IK cuts circumcircle of triangle $\triangle ABC$ at F and S be the second intersection point of line FH with circumcircle of triangle $\triangle ABC$, then prove that SM is tangent to the incircle of triangle $\triangle ABC$.

Úloha 25 (India IMOTC Day 3 Problem 1). V ostrouhlom trojuholníku ABC s $|AB| < |AC|$ označíme I stred vpísanej kružnice a M stred oblúka BAC jeho opísanej kružnice. Nech kolmica cez bod A na stranu BC pretína priamky BI, CI a MI postupne v bodoch P, Q a K . Dokážte, že ťažnica trojuholníka AIK z bodu A prechádza stredom kružnice opísanej trojuholníku PIQ .

Úloha 26 (Irán, 2024 2. kolo Ú3). V trojuholníku ABC označme stred vpísanej kružnice, stred kružnice pripísanej k strane AC a stred kružnice pripísanej k strane AB postupne I, K, L . Kolmice na priamku BC cez body B a C pretnú postupne priamky AC a AB v bodoch E a F . Dokážte, že kružnice AEF, FIL a EIK prechádzajú jedným bodom.

Literatúra

- [1] Yufei Zhao: *Lemmas in Euclidean Geometry*, <http://yufeizhao.com/olympiad/geolemmas.pdf>
- [2] Viacero PraSe materiálov na tému Švrčkov bod
- [3] Kin Y. Li: Angle Bisectors Bisect Arcs, *Mathematical Excalibur*, volume 11, no. 2 (2006)