

Zhodné zobrazenia

18. 4. 2021, Jozef Rajník

Materiál bol spracovaný primárne podľa PraSe seriálu Geometrická zobrazení <https://prase.cz/archive/31/9.pdf>.

1 Osová súmernosť

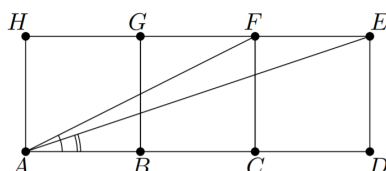
Úloha 1.1. V rovine je daná priamka p a body A, B ležiace v tej istej polrovine vymedzenej priamkou p . Nájdite na priamke p bod P taký, že súčet $|AP| + |PB|$ je najmenší možný.

Úloha 1.2. Na priemere kružnice k zvolíme bod M . Tetiva CD kružnice l prechádza bodom M a zvierá s priemerom AB uhol 45° . Dokážte, že hodnota výrazu $|CM|^2 + |MD|^2$ nezávisí na polohe bodu M .

Úloha 1.3. Je daný ostrouhlý trojuholník s priesečníkom výšok H . Dokážte, že obrazy bodu H v osových súmernostiach podľa strán trojuholníka ABC ležia na kružnici jemu opísanej.

Úloha 1.4. Vnútri ostrého uhla s ramenami p, q je daný bod A . Nájdite body P na priamke p a Q na q tak, aby $|AP| + |PQ| + |QA|$ bolo čo najmenšie možné.

Úloha 1.5. Sú dané tri zhodné štvorce ako na obrázku. Určte hodnotu $|\angle DAE| + |\angle DAF|$.



2 Otočenie

Úloha 2.1. Vo štvorci $ABCD$ je daný bod P tak, že $|PD| = 1$, $|PA| = 2$ a $|PB| = 3$. Určte veľkosť uhla APD .

Úloha 2.2. Rovnostranný trojuholník ABC je vpísaný do kružnice k . Na kratšom oblúku BC kružnice k leží bod P . Dokážte, že platí $|PA| = |PB| + |PC|$.

3 Stredová súmernosť

Úloha 3.1. Kružnice pretína strany BC, CA, AB trojuholníka ABC postupne v bodoch A_1 a A_2, B_1 a B_2, C_1 a C_2 . Ukážte, že ak sa kolmice na zodpovedajúce strany vedené bodmi A_1, B_1, C_1 , pretínajú v jednom bode, tak sa v jednom bode pretnú aj kolmice na zodpovedajúce strany vedené bodmi A_2, B_2, C_2 .

Úloha 3.2. Na strane BC trojuholníka ABC sú dané (nie nutne rôzne) body K, L tak, že $|BK| = |CL|$. Pre ktorú polohu bodov K, L je súčet $|AK| + |AL|$ najmenší možný?

Úloha 3.3. Ukážte, že obrazy priesečníka výšok v stredových súmernostiach podľa stredov strán daného trojuholníka ABC ležia na kružnici opísanej trojuholníku ABC .

Úloha 3.4. Na ťažnici z vrcholu A trojuholníka ABC leží bod X tak, že platí $|CX| = |AB|$. Označme Y priesečník priamky CX a AB . Dokážte, že trojuholník AXY je rovnoramenný.

Úloha 3.5. Kružnice k a l s polomerom 1 sa dotýkajú (zvonka) v bode T . Kružnica m s polomerom 2 má stred na kružnici k a dotýka sa kružnice k v bode B . Dokážte, že priamka BT prechádza jedným z priesečníkov kružníc l a m .

4 Posunutie

Úloha 4.1. Bod P sa teraz pre zmenu nachádza vnútri rovnobežníka $ABCD$ tak, že platí $|\angle APD| + |\angle CPB| = 180^\circ$. Dokážte, že $|\angle CBP| = |\angle PDC|$.

Úloha 4.2. Označme postupne A_1, B_1, C_1 stredy strán BC, CA, AB trojuholníka ABC . Označme I_a, I_b, I_c postupne stredy kružníc vpísaných trojuholníkom $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$ a O_a, O_b, O_c stredy kružníc opísaných týmto trojuholníkom. Dokážte, že trojuholníky $I_aI_bI_c$ a $O_aO_bO_c$ sú zhodné.

Úloha 4.3. Dediny (body) A, B oddeľuje rieka, ktorej brehy tvoria dve rovnobežné priamky. Kde máme postaviť most AB , kolmý na brehy rieky, aby cesta $AMNB$ bola čo najkratšia?

5 Všehochuť zhodných zobrazení

Úloha 5.1 (PraSe 11/12. 1. seriálová séria, úloha 1). Na strane CD štvorca $ABCD$ je daný bod E . Os uhla BAE pretína stranu BC v bode F . Dokážte, že $|AE| = |BF| + |DE|$.

Úloha 5.2 (PraSe 11/12. 1. seriálová séria, úloha 2). V rovine sú dané body A a B . Uvažujme všetky konvexné päťuholníky $ABCDE$ v jednej polrovine určenej priamkou AB také, že $ABDE$ je rovnobežník a BCD je rovnoramenný pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole B . Ukážte, že všetky kružnice nad priemerom CE prechádzajú spoločným bodom.

Náznaky riešení

Riešenia úloh so zdrojom možno nájsť na stránkach zodpovedajúcich olympiád alebo korešpondenčných seminárov. Niektoré úlohy sú vzorovo vyriešené v spomínanom seriáli. V prípade záujmu viem poskytnúť riešenie, napíšte mi mail.

1.1 Zobrazte bod B podľa priamky p .

1.2 Zobrazte D podľa priamky AB na D' a ukážte, že $|CD'|$ je konštantná.

1.5 Preklopte E podľa AD a skúmajte trojuholník AFE' .

2.1 Otočenie so stredom v A o 90° .

2.2 Otočenie so stredom v bode A o 60° .

3.1 Stredová súmernosť podľa stredú kružnice. Načo sa zobrazia kolmice cez A_1, B_1, C_1 ?

3.4 Zobrazte X podľa stredú úsečky BC na X' a pozrite sa na trojuholník ABX' .

3.5 Uvažujte stredovú súmernosť so stredom v bode T . Polomer SB kružnice m sa zobrazí na úsečku $S'B'$. Pozrite sa na štvoruholník $SBS'B'$.

4.1 Posuňte bod P o $\overrightarrow{AB}$ do bodu P' , čo vraví podmienka $|\angle BP'C| + |\angle BPC| = 180^\circ$ teraz?

4.2 Posuňte trojuholník BA_1C_1 na trojuholník CB_1A . Čo viete povedať o $|O_bO_a|$ a $|I_bI_a|$?

4.3 Posuňte A o šírku rieky.