

Deliteľnosť a zvyšky po delení

Jozef Rajník, 23. 6. 2016, MANGA (Matematika na Gamči)

O celých číslach a, b hovoríme, že číslo b je *deliteľné číslom* a , resp. *číslo a delí číslo b* , ak existuje také celé číslo k , pre ktoré platí

$$b = k \cdot a.$$

Túto vlastnosť vieme zapísať ako $b \mid a$.

Napríklad. $5 \mid 20, -12 \mid 60, -18 \mid -18$.

Základné vlastnosti deliteľnosti: pre ľubovoľné celé čísla a, b, c, d platí

$a \mid a,$	Ak $ac \mid bc$ a $c \neq 0$, tak $a \mid b,$
$a \mid 0, 1 \mid a,$	Ak $d \mid a$ a $d \mid b$, tak aj $d \mid (a + b),$
$0 \mid a$ práve vtedy, keď $a = 0,$	Ak $d \mid a$ a $d \mid b$, tak aj $d \mid (a - b),$
Ak $a \mid b$ a $b \mid c$, tak aj $a \mid c,$	Ak $d \mid a$, tak aj $d \mid ca,$
Ak $a \mid b$ a $c \mid d$, tak aj $ac \mid bd,$	Ak $d \mid a \pm b$ a $d \mid a$, tak $d \mid b.$

Dôležitý odhad, ktorý nám môže pomôcť získať lepšie vzťahy o číslach a, b : Ak $b \neq 0$ a $a \mid b$, tak $|a| \leq |b|$. Dokonca, ak neplatí $a \mid b$, tak $2|a| \leq |b|$.

Pri deliteľnosti sú dôležité prvočísla. *Prvočíslo* je také prirodzené číslo, ktoré má práve dvoch kladných deliteľov: 1 a samého seba. Jedno z ich významných použití je, že každé prirodzené číslo sa dá jednoznačne (až na poradie) napísať ako súčin prvočísel. Napr. $220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$. Pomocou rozkladu na prvočísla sa dajú mnohé veci dokázať alebo si lepšie predstaviť. Ak máme dané všeobecne nejaké číslo a , zvykneme je rozklad na prvočísla zapisovať ako

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n},$$

kde $p_1, p_2, \dots, p_n$ sú prvočísla (vhodne zvolené) a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sú nezáporné celé čísla.

Najväčší spoločný deliteľ čísel a, b je najväčšie také celé číslo d , že $d \mid a$ aj $d \mid b$. Označujeme ho (a, b) .

Ak $(a, b) = 1$, hovoríme, že čísla a a b sú *nesúdeliteľné*.

Najmenší spoločný násobok čísel a, b je najmenšie také prirodzené číslo n , že $a \mid n$ a $b \mid n$. Označujeme ho $\text{nsn}(a, b)$ alebo $[a, b]$.

Medzi najväčším spoločným deliteľom a najmenším spoločným násobkom platí vzťah $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$.

Teraz môžeme ukázať niekoľko dôležitých vlastností prvočísel a nesúdeliteľných čísel.

- Ak p je prvočíslo a $p \mid ab$, tak $p \mid a$ alebo $p \mid b$.
- Ak $(d, a) = 1$ a $d \mid ab$, tak $d \mid b$.

Ak uvažujeme deliteľnosť číslom d , nie každé číslo je ním deliteľné. Avšak každé celé číslo a vieme zapísať v tvare

$$a = k \cdot d + z,$$

kde k a z sú celé čísla a $z \in \{0, 1, \dots, d-1\}$. Pre každé a sú čísla k a z sú určené jednoznačne. Vtedy hovoríme, že k je *celočíselný podiel čísel a a d* a z je *zvyšok čísla a po delení číslom d* . Matematicky to vieme zapísať:

$$k = \lfloor a/d \rfloor, \quad z = a \bmod d.$$

Pri zapisovaní zvyškov sa však stretneme sa ešte s iným zápisom, ten sa v matematike používa častejšie. Zápisom

$$a \equiv b \pmod{d}$$

označujeme, že čísla a a b dávajú rovnaký zvyšok po delení d . Čítame ho aj, že *a je kongruentné s b modulo d* . Rozmyslite si, že túto skutočnosť vieme pomocou deliteľnosti vyjadriť ako $d \mid a - b$. Táto definícia môže byť užitočná pri rôznych dôkazoch.

Napríklad. $17 \bmod 5 = 2, 42 \bmod 6 = 0, -28 \bmod 5 = 2$ (lebo $-28 = -6 \cdot 5 + 2$). Tie isté vzťahy môžeme zapísať aj pomocou kongruencií $17 \equiv 2 \pmod{5}, 42 \equiv 0 \pmod{6}, -28 \equiv 2 \pmod{5}$, ale môžeme pomocou nich zapísať aj $42 \equiv 47 \pmod{5}, 136 \equiv -44 \pmod{9}$.

Pravidlá pre prácu zo zvyškami: Ak $a \bmod d = x$ a $b \bmod d = y$, tak

- $(a + b) \bmod d = (x + y) \bmod d$, resp. $a + b \equiv x + y \pmod{d}$,
- $(a - b) \bmod d = (x - y) \bmod d$, resp. $a - b \equiv x - y \pmod{d}$,
- $(a \cdot b) \bmod d = (x \cdot y) \bmod d$, resp. $a \cdot b \equiv x \cdot y \pmod{d}$.

V kongruenciách môžeme krátiť, ale len tie čísla, ktoré sú nesúdeliteľné s číslom poľa ktorého zvyšky určujeme. Presnejšie, ak čísla c a d sú nesúdeliteľné a $c \cdot a \equiv c \cdot b \pmod{d}$, tak potom platí aj $a \equiv b \pmod{d}$. Pri súdeliteľných číslach toto však nesmieme spraviť: $2 \cdot 12 \equiv 2 \cdot 7 \pmod{10}$, ale už neplatí $12 \equiv 7 \pmod{10}$.

Úlohy

Úloha 1. Čísla a, b sú nesúdeliteľné. Ktoré z nasledujúcich dvojíc čísel sú nesúdeliteľné pre všetky celé čísla a, b ? Svoje tvrdenie dokažte.

- a) $a + b, ab$
- b) $a^2 + b^2, ab$
- c) $a + b, a - b$
- d) $a^3, (a + 1)^5$

Úloha 2. Dokážte, že pre každé celé číslo n , je zlomok

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

v základnom tvare. [Medzinárodná matematická olympiáda 1959, úloha 1]

Úloha 3. Nájdite všetky celé čísla n , pre ktoré $n - 3 \mid n^3 - 3$. [Matematický Náboj 2007, úloha 31]

Úloha 4. Nech p a q sú prvočísla. Zistite, aký je najväčší spoločný deliteľ čísel $p + q$ a $p^2 + q^2$.

Úloha 5. Dokážte, že výrazy $23x + y$ a $19x + 3$ sú deliteľné číslom 50 pre rovnaké dvojice prirodzených čísel x a y . [MO60-C-I-2]

Úloha 6. Nech x, y sú také kladné celé čísla, že obe čísla $3x + 5y$ a $5x + 2y$ sú deliteľné číslom 60. Zdôvodnite, prečo číslo 60 delí aj súčet $2x + 3y$. [60MO-C-S-3]

Úloha 7. Dokážte, že najmenší spoločný násobok $[a, b]$ a najväčší spoločný deliteľ (a, b) ľubovoľných dvoch kladných celých čísel a, b spĺňajú nerovnosť

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geq 2ab.$$

Zistite, kedy v tejto nerovnosti nastáva rovnosť. [60MO-C-I-5]

Úloha 8. Nájdite všetky prvočísla p a q také, že $p \mid q^2 - 4$ a tiež $q \mid p^2 - 1$. [KMS 14/15, 1. letná séria, úloha 3]

Úloha 9. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b , pre ktoré platí

$$a \mid b \quad \text{a zároveň} \quad b + 1 \mid 3a + 4.$$

[60MO-B-II-2]

Úloha 10. Nech m je prirodzené číslo, ktoré má 7 kladných deliteľov, a n je prirodzené číslo, ktoré má 9 kladných deliteľov. Koľko deliteľov môže mať súčin $m \cdot n$? [64MO-B-I-4]

Úloha 11. Predpokladajme, že prirodzené číslo a má 15 kladných deliteľov. Koľko ich môže mať prirodzené číslo b , ak najmenší spoločný násobok čísel a a b má 20 kladných deliteľov? [64MO-B-S-1]

Úloha 12. Súčin všetkých kladných deliteľov prirodzeného čísla n je 20^{15} . Určte n .

Úloha 13. Nájdite všetky dvojice prvočísel p, q , pre ktoré existuje prirodzené číslo a také, že

$$\frac{pq}{p+q} = \frac{a^2+1}{a+1}.$$

[62MO-A-I-1]

Úloha 14. Číslo n je súčinom štyroch prvočísel. Ak každé z týchto prvočísel zväčšíme o 1 a vzniknuté štyri čísla vynásobíme, dostaneme číslo o 2886 väčšie ako pôvodné číslo n . Určte všetky také n . [MO59-B-II-4]

Úloha 15. Určte všetky trojice (p, q, r) prvočísel, pre ktoré platí $(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr$. [MO60-A-III-2]

Úloha 16. Číslo n je súčinom troch (nie nutne rôznych) prvočísel. Keď zväčšíme každé z nich o 1, zväčší sa ich súčin o 963. Určte pôvodné číslo n . [63MO-A-I-1]

Úloha 17. Nájdite všetky celé kladné čísla, ktoré nie sú mocninou čísla 2 a ktoré sa rovnajú súčtu trojnásobku svojho najväčšieho nepárneho deliteľa a päťnásobku svojho najmenšieho nepárneho deliteľa väčšieho ako 1. [63MO-A-II-1]

Úloha 18. Zistite, aký zvyšok po delení piatimi dáva číslo 2^{2016} .

Úloha 19. Určte všetky kladné celé čísla m , pre ktoré je rozdiel $m^6 - m^2$ deliteľný číslom 120. [MO55-C-I-1]

Úloha 20. Dokážte, že pre každé nepárne prirodzené číslo n je súčet $n^4 + 2n^2 + 2013$ deliteľný číslom 96. [MO63-C-I-5]

Úloha 21. Dokážte, že medzi ľubovoľnými štyrmi celými číslami existujú dve čísla, ktorých rozdiel je deliteľný tromi.

Úloha 22. Snehulienka ide kúpiť svojim siedmim trpaslíkom cukríky. V obchode majú na pulte v rade uložených 7 balíčkov. V každom balíčku je nejaký (nie nutne rovnaký) počet cukríkov. Snehulienka môže kúpiť len niekoľko (aspoň jeden) balíčkov, ktoré na pulte tvoria súvislý úsek. Dokážte, že Snehulienka si vie vybrať niekoľko za sebou idúcich balíčkov tak, aby súčet cukríkov v nich bol deliteľný siedmimi, a to bez ohľadu na to, koľko cukríkov jednotlivé balíčky obsahujú.

Úloha 23. V Kocúrkove majú mince v hodnotách 42 a 60. Nájdite všetky sumy, ktoré je možné týmito mincami zaplatiť, ak pri platení možno aj vydávať.

Úloha 24. Označme $p(n)$ počet spôsobov, ako možno vyjsť schodisko, ktoré má n schodov, pričom jedným krokom môžeme prejsť jeden alebo dva schody. Určte poslednú cifru čísla $p(2016)$.

Úloha 25. Popoluška počítala fazuľky. Najprv ich ukladala do misky po 10-tich až jej nakoniec zostali posledné 3 fazuľky, ale zabudla koľko napočítala. Potom fazuľky vysypala a ukladala ich do misky po 7-mich fazuľkách, až jej ostalo 6 vonku. Keďže znova zabudla, pri ďalšom opakovaní ich ukladala po 9-tich, až jej ostali 4 fazuľky. Koľko fazuliek mohla mať Popoluška? Nájdite všetky možnosti.

Ak by vás úlohy podobné Popoluške zaujímaly viac, pozrite si niečo o Čínskej zvyškovej vete.

Poznámky

Úlohy označené MOr-A-K-u sú z Matematickej olympiády. r označuje ročník, A kategóriu (A, B, C), K kolo (I - domáce, S - školské, II - krajské, III - celoštátne) a u číslo úlohy. Vzorové riešenia môžete nájsť na stránke <https://www.skmo.sk/dokumenty.php>.

Vzorové riešenia úloh z Korešpondenčného matematického seminára (KMS) môžete nájsť na stránke <https://www.kms.sk/archiv>.