

Deliteľnosť

Jozef Rajník, krúžok

O celých číslach a, b hovoríme, že číslo b je *deliteľné* číslom a , resp. *číсло a delí číslo b* , ak existuje také celé číslo k , pre ktoré platí

$$b = k \cdot a.$$

Túto vlastnosť vieme zapísať ako $b \mid a$.

Základné vlastnosti deliteľnosti (platia pre ľubovoľné celé čísla a, b, c, d):

$a \mid a$.	Ak $ac \mid bc$ a $c \neq 0$, tak $a \mid b$.
$a \mid 0, 1 \mid a$.	Ak $c \mid a$ a $c \mid b$, tak aj $c \mid (a + b)$.
$0 \mid a$ práve vtedy, keď $a = 0$.	Ak $c \mid a$ a $c \mid b$, tak aj $c \mid (a - b)$.
Ak $a \mid b$ a $b \mid c$, tak aj $a \mid c$.	Ak $c \mid a$, tak aj $c \mid ba$.
Ak $a \mid b$ a $c \mid d$, tak aj $ac \mid bd$.	Ak $c \mid a + b$ a $c \mid a$, tak $c \mid b$.

Dôležitý odhad, ktorý nám môže pomôcť získať lepšie vzťahy o číslach a, b : Ak $b \neq 0$ a $a \mid b$, tak $|a| \leq |b|$. Dokonca, ak neplatí $a \mid b$, tak $2|a| \leq |b|$.

Pri deliteľnosti sú dôležité prvočísla. *Prvočíсло* je také prirodzené číslo, ktoré má práve dvoch kladných deliteľov: 1 a samého seba. Jedno z ich významných použití je, že každé prirodzené číslo sa dá jednoznačne (až na poradie) napísať ako súčin prvočísel. Napr $220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$. Pomocou rozkladu na prvočísla sa dajú mnohé veci dokázať alebo si lepšie predstaviť. Ak máme dané všeobecne nejaké číslo a , zvykneme je rozklad na prvočísla označovať ako

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n},$$

kde $p_1, p_2, \dots, p_n$ sú prvočísla (vhodne zvolené) a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sú nezáporné celé čísla.

Najväčší spoločný deliteľ čísel a, b je najväčšie také celé číslo d , že $d \mid a$ aj $d \mid b$. Označujeme ho (a, b) .

Ak $(a, b) = 1$, hovoríme, že čísla a a b sú *nesúdeliteľné*.

Najmenší spoločný násobok čísel a, b je najmenšie také prirodzené číslo n , že $a \mid n$ a $b \mid n$. Označujeme ho $nsn(a, b)$ alebo $[a, b]$.

Medzi najväčším spoločným deliteľom a najmenším spoločným násobkom platí vzťah $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$.

Teraz môžeme ukázať niekoľko dôležitých vlastností prvočísel a nesúdeliteľných čísel.

- Ak p je prvočíсло a $p \mid ab$, tak $p \mid a$ alebo $p \mid b$.
- Ak $(d, a) = 1$ a $d \mid ab$, tak $d \mid b$.

Úloha 1. Čísla a, b sú nesúdeliteľné. Ktoré z nasledujúcich dvojíc čísel sú nesúdeliteľné pre všetky celé čísla a, b ?

- a) $a + b, ab$
- b) $a^2 + b^2, ab$
- c) $a + b, a - b$
- d) $a^3, (a + 1)^5$

Úloha 2. (IMO 1959-1) Dokážte, že pre každé celé číslo n , je zlomok

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

v základnom tvare.

Úloha 3. (Matematický Náboj 2007-31) Nájdite všetky celé čísla n , pre ktoré $n - 3 \mid n^3 - 3$.

Úloha 4. Nech p a q sú prvočísla. Zistite, aký je najväčší spoločný deliteľ čísel $p + q$ a $p^2 + q^2$.

Úloha 5. (60MO-C-I-5) Dokážte, že najmenší spoločný násobok $[a, b]$ a najväčší spoločný deliteľ (a, b) ľubovoľných dvoch kladných celých čísel a, b spĺňajú nerovnosť

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geq 2ab.$$

Zistite, kedy v tejto nerovnosti nastáva rovnosť.

Úloha 6. (63MO-A-I-1) Číslo n je súčinom troch (nie nutne rôznych) prvočísel. Keď zväčšíme každé z nich o 1, zväčší sa ich súčin o 963. Určte pôvodné číslo n .

Úloha 7. (62MO-A-I-1) Nájdite všetky dvojice prvočísel p, q , pre ktoré existuje prirodzené číslo a také, že

$$\frac{pq}{p+q} = \frac{a^2+1}{a+1}.$$

Úloha 8. (60MO-B-II-2) Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b , pre ktoré platí

$$a \mid b \quad \text{a zároveň} \quad b + 1 \mid 3a + 4.$$

Úloha 9. (MO60-C-I-2) Dokážte, že výrazy $23x + y$ a $19x + 3$ sú deliteľné číslom 50 pre rovnaké dvojice prirodzených čísel x a y .

Úloha 10. (60MO-C-S-3) Nech x, y sú také kladné celé čísla, že obe čísla $3x + 5y$ a $5x + 2y$ sú deliteľné číslom 60. Zdôvodnite, prečo číslo 60 delí aj súčet $2x + 3y$.

Úloha 11. (63MO-A-II-1) Nájdite všetky celé kladné čísla, ktoré nie sú mocninou čísla 2 a ktoré sa rovnajú súčtu trojnásobku svojho najväčšieho nepárneho deliteľa a päťnásobku svojho najmenšieho nepárneho deliteľa väčšieho ako 1.